Краткие сообщения по физике № 6-1989 г.

УДК 534.8

ПОРОГ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ НАКАЧКЕ

А.В. Ведерко, К.И. Воляк, В.Ф. Марченко

Найден порог параметрической генерации при синфазном возбуждении волн на поверхности свободной жидкости с учетом поперечной неоднородности поля накачки и дифракционной расходимости пучков субгармоники.

Поле субгармоники, возбуждаемое на поверхности осциллирующей жидкости, представляет собой две волны, бегущие навстречу друг другу /1/. В приближении плоских волн порог параметрической генерации определяется величиной затухания и продольным размером области возбуждения. В настоящем сообщении рассчитан порог одномерной генерации гравитационно-капиллярных волн с учетом дополнительных факторов: поперечной неоднородности поля накачки и расходимости волн субгармоники. В работах /2/, /3/ учитывалась ограниченность области возбуждения в поперечном направлении, обусловленная наличием отражающих стенок для поверхностных волн. В этом случае поле субгармоники приобретает характерную для волноводов модовую структуру. В более общей постановке двумерная параметрическая генерация рассматривалась в работе /4/, в которой главное внимание уделено объяснению возникающих ячеистых структур, обусловленных параметрической неустойчивостью как в продольном, так и поперечном направлениях. В цитируемых выше работах величина пороговой амплитуды накачки не оценивалась.

Для неограниченной поверхности жидкости поле субгармоники естественно представить в форме плоских встречных пучков, используемых, в частности, в теории оптических систем /5/. Уравнения для комплексных амплитуд волн при заданной синфазной накачке имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{i}{2k}\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + \alpha A_1 + i\sigma A_2^* A_p = 0,\\ \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{i}{2k}\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} - \alpha A_2 - i\sigma A_1^* A_p = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где k – волновое число субгармоники, $\sigma = k^2/2$ – параметр нелинейности, $\alpha = 2\nu k^2/v_g$, ν – кинематическая вязкость, v_g – групповая скорость, A_p – амплитуда смещения поверхности жидкости на частоте накачки. Пространственное распределение этого смещения будем считать однородным в области возбуждения, ограниченной точками $x = -\ l/2,\ l/2$, и меняющимся по гауссову закону в поперечном направлении $A_p = A_{po}e^{-y^2/w_0^2}$.

Решение (1) в отсутствие потерь и взаимодействия волн друг с другом может быть записано в форме /5/:

$$G_n^{(1,2)} = \frac{2^{1/4} B_{(1,2)n}}{2^{n/2}\pi^{1/4}\sqrt{n!}\,(w^{(1,2)})^{1/2}} H_n\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{w^{(1,2)}}\right) \exp\left[i(2n+1)\Phi^{(1,2)} + y^2\left(\pm\frac{k^2}{2R^{(1,2)}} - \frac{1}{[w^{(1,2)}]^2}\right)\right], \tag{2}$$

$$\Phi^{(1,2)} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\lambda x}{\pi[w_0^{(1,2)}]^2}\ ;\quad R^{(1,2)} = x\left\{1+\frac{k[w_0^{(1,2)}]^2}{2x}\right\}^2,$$

$$w^{(1,2)}(x) = w_0^{(1,2)}\left\{1+\frac{\lambda x}{\pi[w_0^{(1,2)}]^2}\right\}^{1/2},$$

где H_n – полиномы Эрмита, $w_0^{(1,2)}$ – размер перетяжки пучков при $x = 0$. Предполагая, что при взаимодействии волн структура поля сохраняет вид (2), а амплитуды B_n становятся медленно меняющимися функциями x, и используя ортогональность функций G_n, преобразуем (1) к виду:

$$\frac{dB_{1m}}{dx} + \alpha B_{1m} - i\sigma A_{po}\sum_n B_{2n}^* C_{mn} e^{-i\Phi(m-n)} = 0,$$

$$\frac{dB_{2m}}{dx} - \alpha B_{2m} + i\sigma A_{po}\sum_n B_{1n}^* C_{mn} e^{-i\Phi(m-n)} = 0,$$

где $C_{mn} = \pi(m!n!\,2^{m+n})^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)H_m(\xi)\exp[-\xi^2(1+w^2/2w_0^2)]\,d\xi$.

Здесь использовано физически оправданное предположение, что вблизи $x = 0$ ширина пучков субгармоники близка к ширине пучка накачки $w_0^{(1)} \approx w_0^{(2)} \approx w_0$. Разницей в радиусах кривизны фронтов для небольших длин l можно пренебречь.

Рассмотрим низшую (m, n = 0) моду, для которой $H_0(\xi) = 1$ и соответственно $C_{00} = (3/2 + x^2/b^2)^{-1/2}$, $b = kw_0^2/\sqrt{2}$. Переходя к действительным амплитудам и фазам $B_{1,2} = a_{1,2}e^{i\varphi_{1,2}}$, можно сразу из граничных условий $a_1(-l/2) = 0$ и $a_2(l/2) = 0$ установить, что разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_p$ остается постоянной ($\Delta\varphi = \pi/2$). Поэтому далее следует рассматривать лишь уравнения для действительных амплитуд:

$$da_{10}/dx + \alpha a_{10} - \sigma a_{20}a_{po}(3/2 + x^2/b^2)^{-1/2} = 0,$$

$$da_{20}/dx - \alpha a_{20} + \sigma a_{10}a_{po}(3/2 + x^2/b^2)^{-1/2} = 0,\qquad a_{po} = |A_{po}|. \tag{3}$$

Найдем порог возбуждения сначала без учета затухания ($\alpha = 0$). Используя интеграл системы (3) $a_{10}^2 + a_{20}^2 = V_0^2 = \mathrm{const}$, ее решение представим в виде:

$$a_{10} = V_0\sin\left[\sigma a_{po}b\left(\operatorname{arsh}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{x}{b}\right) - \operatorname{arsh}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{l}{2b}\right)\right)\right],$$

$$a_{20} = V_0\sin\left[\sigma a_{po}b\left(\operatorname{arsh}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{l}{2b}\right) - \operatorname{arsh}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{x}{b}\right)\right)\right].$$

Пороговая амплитуда накачки определяется из условия $a_{10}(l/2) = V_0$, $2\sigma a_{po}^{th}\, b\operatorname{arsh}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{l}{2b}\right) = \pi/2$.

Отсюда

$$a_{po}^{th} = \pi/2\sigma b\operatorname{arch}(1 + l^2/3b^2). \tag{4}$$

Так как в приближении плоских волн пороговая амплитуда выражается в виде $\bar{a}_{po}^{th} = \pi/2\sigma l\ /1/$, удобно ввести отношение $a_{po}^{th}/\bar{a}_{po}^{th} = l/b\operatorname{arsh}(1 + l^2/3b^2) = F(b/l)$, характеризующее влияние поперечной неоднородности поля накачки на порог возбуждения. При больших отношениях b/l, но конечных w_0 $F(b/l) \to$

$\sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$. Вследствие дифракционной расходимости пучков субгармоники эффективная область их взаимодействия с полем накачки уменьшается, поэтому порог оказывается выше, чем для плоских волн. При реальных значениях $b/l \sim 1$, $w_0/l \ll 1$, $F(b/l) \approx 1{,}3$. При дальнейшем уменьшении b/l порог резко возрастает.

Для первой моды $(m, n = 1)$ $H_1(\xi) = \xi$ и $C_{11} = (3/2 + x^2/b^2)^{-3/2}$. Из соотношения амплитуд $a_{po}^{th}/a_{p1}^{th} = \sqrt{27/8}\,(b/l)\sqrt{1 + l^2/6b^2}\,\mathrm{arch}\,(1 + l^2/6b^2)$ следует, что порог первой моды приблизительно в 1,5 раза выше, чем нулевой.

Можно представить, что уравнения (3) описывают взаимодействие встречных волн в условиях, когда коэффициент нелинейной связи уменьшается к периферии области возбуждения. Если ввести усредненный коэффициент связи

$$\sigma_{\text{эфф}} = (\sigma/l) \int_{-l/2}^{l/2} (3/2 + x^2/b^2)^{-1/2}\,dx = (\sigma b/l)\,\mathrm{arch}\,(1 + l^2/3b^2),$$

то выражение для порога в приближении плоских волн, в котором $\sigma \to \sigma_{eff}$, точно совпадает с формулой (4). Отсюда следует возможность учесть затухание поверхностных волн, рассмотрев систему (4) при $\alpha \neq 0$ и $\sigma = \sigma_{eff}$. Пороговое значение амплитуды накачки, учитывающее как расходимость волн субгармоники, так и потери, примет вид $a_{po}^{th} = (1/\sigma_{eff})\sqrt{\pi^2/4l^2 + \alpha^2}$.

Авторы благодарны А.П. Сухорукову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.С., Марченко В.Ф., Целыковский А.Ф. ЖТФ, 40, 1331 (1970).
2. Barnard B., Mahony J. Phil. Trans. Royal. Soc., London, A286, 87 (1977).
3. Wu J., Keolian R., Rudnick J. Phys. Rev. Lett., 52, 1421 (1984).
4. Езерский А.Б. и др. ЖЭТФ, 91, 2070 (1986).
5. Kogelnick H., Li T. Appl. Optics, 5, 1550 (1966).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 7 марта 1989 г.