Краткие сообщения по физике № 10-1989 г.

УДК 530. 145

НОВЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМОСТИ

А.Г. Ушверидзе

Предложен аналитический метод построения многомерных квазиточнорешаемых дифференциальных уравнений.

В настоящее время интенсивно развивается теория квазиточнорешаемых (КТР) моделей нерелятивистской квантовой механики /1, 2/. Напомним, что модель называется квазиточнорешаемой, если число точно вычисляемых уровней энергии в ней конечно. Наибольший интерес представляют многомерные КТР модели, построение которых сводится к конструированию спектральных дифференциальных уравнений

$$H\varphi(x) = [P_{ik}(x)\partial_i\partial_k + Q_i(x)\partial_i + R(x)]\varphi(x) = E\varphi(x), \quad \varphi(x) \in W, \tag{1}$$

имеющих ограниченное количество точных решений в некотором классе функций W. (С помощью процедуры, описанной в работах /2, 3/, любое D-мерное уравнение типа (1) может быть сведено к D + 1-мерному уравнению Шредингера на, вообще говоря, кривом многообразии.) В настоящей работе сформулирован новый метод построения КТР уравнений типа (1), который отличается от предложенных ранее методов, основанных на использовании дифференциальных реализаций конечномерных /1/ и бесконечномерных /2/ представлений алгебр Ли, большей простотой, так как не требует работы с представлениями алгебр Ли и с базисами Гельфанда – Цетлина.

Пусть $M_p^{(1)}, M_q^{(2)}, K_{pr}^{(11)}, K_{ps}^{(12)}, K_{qr}^{(21)}, K_{qs}^{(22)}$, $p = 1, \ldots, P$, $q = 1, \ldots, Q$, $r = 1, \ldots, R$, $s = 1, \ldots, S$ – целые числа, подобранные так, чтобы система неравенств

$$\begin{gathered} 0 \leqslant M_p^{(1)} + K_{pr}^{(11)} m_r + K_{ps}^{(12)} n_s \leqslant \infty, \quad p = 1, \ldots, P; \\ -\infty \leqslant M_q^{(2)} + K_{qr}^{(21)} m_r + K_{qs}^{(22)} n_s \leqslant \infty, \quad q = 1, \ldots, Q; \\ 0 \leqslant m_r \leqslant \infty, \quad r = 1, \ldots, R; \quad -\infty \leqslant n_s \leqslant \infty, \quad s = 1, \ldots, S \end{gathered} \tag{2}$$

имела конечное число решений в целых числах m_r и n_s.

Рассмотрим пространство W, натянутое на базисные функции

$$\prod_{p=1}^{P} x_p^{M_p^{(1)} + K_{pr}^{(11)} m_r + K_{ps}^{(12)} n_s} \prod_{q=1}^{Q} y_q^{M_q^{(2)} + K_{qr}^{(21)} m_r + K_{qs}^{(22)} n_s} \tag{3}$$

Это пространство конечномерно. Его размерность равна числу различных решений системы (2). Пространство W удобно представить как линейную оболочку подпространств $|m_1 \ldots m_R\rangle$, $m_r \geqslant 0$, $r = 1, \ldots, R$, натянутых на функции (3) с фиксированными значениями $m_1 \ldots m_R$ (допустимые значения чисел $n_1 \ldots n_s$ находятся из системы (2)). Если для некоторого набора $m_1 \ldots m_R$ система (2) не имеет решений, то соответствующее подпространство $|m_1 \ldots m_R\rangle$ имеет нулевую размерность и отождествляется с нулевым вектором пространства W.

Введем в W операторы следующих типов: а) операторы рождения и уничтожения $H_r^{\pm}$, $r = 1, \ldots, R$, определяемые условием $H^{\pm}|m_1 \ldots m_r \ldots m_R> \subset |m_1 \ldots m_r \pm 1 \ldots m_R>$; б) нейтральные операторы H^0, определяемые условием $H^0|m_1 \ldots m_R> \subset |m_1 \ldots m_R>$; в) диагональные нейтральные операторы D_r, $r = 1, \ldots, R$, определяемые условием $D_r|m_1 \ldots m_r \ldots m_R> = m_r|m_1 \ldots m_r \ldots m_R>$. Операторы первых двух типов можно представить в дифференциальной форме в виде линейных комбинаций базисных операторов

$$\prod_{p=1}^{P} x_p^{a_p} (\partial/\partial x_p)^{b_p} \prod_{q=1}^{Q} y_q^{c_q} (\partial/\partial y_q)^{d_q}, \tag{4}$$

где a_p, b_p, c_q, d_q — целые числа, удовлетворяющие ограничениям $a_p \geqslant 0$, $b_p \geqslant 0$, $c_q \geqslant -\infty$, $d_q \geqslant 0$. Для $H_r^{\pm}$ эти числа удовлетворяют дополнительным ограничениям: $a_p - b_p = \pm K_{pr}^{(11)} + K_{ps}^{(12)} l_s$, $p = 1,\ldots, P$, $c_q - d_q = \pm K_{qr}^{(21)} + K_{qs}^{(22)} l_s$; $q = 1, \ldots, Q$. Для H^0 они вырождаются в $a_p - b_p = K_{ps}^{(12)} l_s$, $p = 1,\ldots, P$, $c_q - d_q = K_{qs}^{(22)} l_s$, $q = 1, \ldots, Q$. Здесь l_s — произвольные целые числа. Диагональные нейтральные операторы имеют вид:

$$D_r = \sum_p L_{rp}^{(11)} (x_p \partial/\partial x_p - M_p^{(1)}) + \sum_q L_{rq}^{(12)} (y_q \partial/\partial y_q - M_q^{(2)}), \tag{5}$$

где $L^{(11)}$ и $L^{(12)}$ — блоки блочной матрицы $(K^{ik})^{-1}$.

Составим из операторов D_r, $H_r^{\pm}$, H^0 новый оператор

$$\begin{aligned} H = {} & (H^0 + \sum_{\rho} H_{\rho}^{+} + \sum_{\rho,\sigma} H_{\rho}^{+} H_{\sigma}^{+} + \ldots) + \sum_r (H_r^{-} + H_r^{-} \sum_{\rho \neq r} H_{\rho}^{+} + H_r^{-} \sum_{\rho,\sigma \neq r} H_{\rho}^{+} H_{\sigma}^{+} + \ldots) D_r + \\ & + \sum_r (H_r^{-} H_r^{-} + H_r^{-} H_r^{-} \sum_{\rho \neq r} H_{\rho}^{+} + H_r^{-} H_r^{-} \sum_{\rho,\sigma \neq r} H_{\rho}^{+} H_{\sigma}^{+} + \ldots)\, D_r (D_r - 1) + \\ & + \sum_{r \neq s} (H_r^{-} H_s^{-} + H_r^{-} H_s^{-} \sum_{\rho \neq r,\, s} H_{\rho}^{+} + H_r^{-} H_s^{-} \sum_{\rho,\sigma \neq r,s} H_{\rho}^{+} H_{\sigma}^{+} + \ldots)\, D_r D_s + \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

который условимся называть гамильтонианом. В формуле (6) следует иметь в виду, что символы $H_r^{\pm}$ H^0 фиксируют не конкретный вид оператора, а только его тип. Поэтому одному и тому же символу $H_r^{\pm}$ или H^0, встречающемуся в разных местах формулы (6), могут соответствовать разные операторы. Гамильтониан H действует внутри пространства W. Поскольку это пространство конечномерно, то и спектральная задача для H в W является конечномерной, и, следовательно, дифференциальное уравнение $H\varphi = E\varphi$ для $\varphi \in W$ является квазиточнорешаемым. Для того, чтобы полученное уравнение было уравнением второго порядка и имело вид (1), порядки дифференциальных базисных операторов (4), используемых для построения H^+, H^0 и H^-, не должны превышать соответственно 2, 2 и 1. Согласно (5), гамильтониан H явно зависит от набора чисел $\{M\}$ через операторы D_r. Если количество наборов $\{M\}$, для каждого из котороых система (2) имеет конечное число решений, бесконечно, то мы приходим к бесконечной серии КТР уравнений конечного порядка. Если все операторы H^- в (6) положить равными нулю, то зависимость H от $\{M\}$ пропадает и мы приходим к одному уравнению, имеющему бесконечное множество точных решений. Если отвлечься от вопросов полноты, то такое уравнение можно назвать точнорешаемым.

Рассмотрим несколько, достаточно произвольно выбранных примеров, демонстрирующих работу метода для одномерного и ряда двумерных случаев.

Пример 1: P = 1, Q = 0, R = 1, S = 0. Базисные функции: x^{M-m}, $0 \leqslant m \leqslant M$. Базисные операторы: $H^+ = (\partial, x\partial^2)$, $H^- = (x, x^2\partial)$, $H^0 = (1, x\partial, x^2\partial^2)$. Диагональный оператор: $D = (-x\partial + M)$. Гамильтониан: $H = a_1 x\partial + a_2 x^2\partial^2 + a_3\partial + a_4 x\partial^2 + a_5\partial^2 + (a_6 x + a_7 x^2\partial)(-x\partial + M) + a_8 x^2(-x\partial + M)(-x\partial + M - 1)$. При $a_6, \ldots, a_8 = 0$ возникает точнорешаемый случай.

Пример 2: P = 2, Q = 0, R = 2, S = 0. Базисные функции: $x_1^{M_1 - m_1 - m_2} x_2^{M_2 + m_1 - m_2}$, $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0$, $m_1 + m_2 \leqslant M_1$, $m_2 - m_1 \leqslant M_2$. Базисные операторы: $H_1^+ = (x_2\partial_1, x_2^2\partial_1\partial_2, x_1x_2\partial_1^2)$, $H_1^- = (x_1\partial_2)$, $H_2^+ = (\partial_1\partial_2)$, $H_2^- = (x_1x_2, x_1x_2^2\partial_2, x_1^2x_2\partial_1)$, $H_0 = (1, x_1\partial_1, x_2\partial_2, x_1^2\partial_1^2, x_2^2\partial_2^2, x_1x_2\partial_1\partial_2)$. Диагональные операторы: $D_1 = (1/2)(-x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + M_1 - M_2)$, $D_2 = (1/2)(-x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + M_1 + M_2)$.

Гамильтониан: $H = a_1x_1\partial_1 + a_2x_2\partial_2 + a_3x_1^2\partial_1^2 + a_4x_1x_2\partial_1\partial_2 + a_5x_2^2\partial_2^2 + a_6x_2\partial_1 + a_7x_2^2\partial_1\partial_2 + a_8x_1x_2\partial_1^2 +$

$+a_9\partial_1\partial_2 + a_{10}x_2^2\partial_1^2 + a_{11}x_1\partial_2(-x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + M_1 - M_2) + (a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_2^2\partial_2 + a_{14}x_1^2x_2\partial_1 + a_{15}x_1x_2^2\partial_1) \times$ $\times (-x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + M_1 + M_2) + a_{16}x_1x_2(-x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + M_1 + M_2)\ (-x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + M_1 + M_2 - 2)$. При $a_{11}, \ldots, a_{16} = 0$ возникает точнорешаемый случай.

Пример 3: $P = 1$, $Q = 1$, $R = 2$, $S = 0$. Базисные функции: $x^{M-m_1-2m_2}y^{N-m_1-m_2}$, $m_1 \geqslant 0, m_2 \geqslant 0$, $m_1 + 2m_2 \leqslant M$. Базисные операторы: $H_1^+ = (y^{-1}\partial_x, \partial_x\partial_y, xy^{-1}\partial_x^2)$, $H_1^- = (xy, x^2y\partial_x, xy^2\partial_y)$, $H_2^+ = (y^{-1}\partial_x^2)$, $H_2^- = (x^2y, x^3y\partial_x, x^2y^2\partial_y)$, $H^0 = (1, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x^2, xy\partial_x\partial_y, y^2\partial_y^2)$. Диагональные операторы: $D_1 = x\partial_x - 2y\partial_y - M + 2N$, $D_2 = -x\partial_x + y\partial_y + M - N$. Гамильтониан: $H = a_1x\partial_x + a_2y\partial_y + a_3x^2\partial_x^2 + a_4xy\partial_x\partial_y + a_5y^2\partial_y^2 + a_6y^{-1}\partial_x + a_7\partial_x\partial_y + a_8y^{-1}\partial_x^2 + a_9y^{-1}\partial_x^2 + a_{10}y^{-2}\partial_x^2 + (a_{11}xy + a_{12}x^2y^2\partial_x + a_{13}xy^2\partial_y)(x\partial_x - 2y\partial_y - M + 2N) + (a_{14}x^2y + a_{15}x^3y\partial_x + a_{16}x^2y^2\partial_y + a_{17}x^2\partial_x)(-x\partial_x + y\partial_y + M - N) + a_{18}x^2y^2(x\partial_x - 2y\partial_y - M + 2N)(x\partial_x - 2y\partial_y - M + 2N - 1) + a_{19}x^4y^2(-x\partial_x + y\partial_y + M - N)(-x\partial_x + y\partial_y + M - N - 1) + a_{20}x^3y^2(x\partial_x - 2y\partial_y - M + 2N)(-x\partial_x + y\partial_y + M - N)$. При $a_{11}, \ldots, a_{20} = 0$ возникает точнорешаемый случай.

Пример 4: $P = 2$, $Q = 0$, $R = 1$, $S = 1$. Базисные функции: $x_1^{M_1-2m-n}x_2^{M_2+n}$, $m \geqslant 0$, $M_2 + n \geqslant 0$, $M_1 - 2m - n \geqslant 0$. Базисные операторы: $H^+ = (\partial_1^2, \partial_1\partial_2, \partial_2^2)$, $H^- = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1^3\partial_1, x_1^3\partial_2, x_1^2x_2\partial_1, x_1^2x_2\partial_2, x_1x_2^2\partial_1, x_1x_2^2\partial_1, x_1x_2^2\partial_2, x_2^3\partial_1, x_2^3\partial_2)$, $H^0 = (x_1\partial_1, x_1\partial_2, x_2\partial_1, x_2\partial_2, x_1^2\partial_1^2, x_1^2\partial_1\partial_2, x_1^2\partial_2^2, x_1x_2\partial_1^2, x_1x_2\partial_1\partial_2, x_1x_2\partial_2^2, x_2^2\partial_1^2, x_2^2\partial_1\partial_2, x_2^2\partial_2^2)$. Диагональный оператор: $D = (1/2)(-x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + M_1 + M_2)$. Гамильтониан: $H = a_1x_1\partial_1 + a_2x_1\partial_2 + a_3x_2\partial_1 + a_4x_2\partial_2 + a_5x_1^2\partial_1^2 + a_6x_1^2\partial_1\partial_2 + a_7x_1^2\partial_2^2 + a_8x_1x_2\partial_1^2 + a_9x_1x_2\partial_1\partial_2 + a_{10} \times$ $\times x_1x_2\partial_2^2 + a_{11}x_2^2\partial_1^2 + a_{12}x_2^2\partial_1\partial_2 + a_{13}x_2^2\partial_2^2 + a_{14}\partial_1^2 + a_{15}\partial_1\partial_2 + a_{16}\partial_2^2 + (a_{17}x_1^2 + a_{18}x_1x_2 + a_{19}x_2^2 + a_{20} \times$ $\times x_1^3\partial_1 + a_{21}x_1^3\partial_2 + a_{22}x_1^2x_2\partial_1 + a_{23}x_1^2x_2\partial_2 + a_{24}x_1x_2^2\partial_1 + a_{25}x_1x_2\partial_2 + a_{26}x_2^3\partial_1 + a_{27}x_2^3\partial_2)(-x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + M_1 + M_2) + (a_{28}x_1^4 + a_{29}x_1^3x_2 + a_{30}x_1^2x_2^2 + a_{31}x_1x_2^3 + a_{32}x_2^4)(-x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + M_1 + M_2)(-x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + M_1 + M_2 - 2)$. При $a_{17}, \ldots, a_{32} = 0$ возникает точнорешаемый случай.

Предложенная схема сохраняет свою силу, если часть координат x_p заменить на грассмановские переменные θ_p. Это позволяет строить матричные дифференциальные уравнения типа (1).

Часть результатов данной работы была предварительно опубликована в виде препринта /4/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shifman M. Preprint CERN CH-1211, 1988; Shifman M., Turbiner A. Preprint ITEP-174, M., 1988.
2. Ушверидзе А. Г. ЭЧАЯ, **20**, 1185 (1989).
3. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 28 (1989).
4. Ушверидзе А. Г. Препринт ИФАН ГССР № ФТТ-11, Тбилиси, 1989.

Поступила в редакцию 19 июля 1989 г.