Краткие сообщения по физике № 10-1989 г.

УДК 530. 145

СКРЫТАЯ СИММЕТРИЯ МОДЕЛИ ГОДЕНА

Т.И. Маглаперидзе, А.Г. Ушверидзе

Показано, что вполне интегрируемая модель Годена на алгебре sl (2) ⊕ ... ⊕ sl(2) (N раз) и на ее контракциях эквивалентна квантовому ротатору на алгебре sl (N – 1).

Рассмотрим семейство коммутирующих между собой операторов

$$\vec{S}(\lambda)\vec{S}(\lambda) \equiv S^0(\lambda)S^0(\lambda) - \frac{1}{2}S^-(\lambda)S^+(\lambda) - \frac{1}{2}S^+(\lambda)S^-(\lambda), \tag{1}$$

в которых $S^{0,\pm}(\lambda)$ – операторнозначные функции, удовлетворяющие коммутационным соотношениям бесконечномерной алгебры Ли:

$$[S^-(\lambda), S^+(\mu)] = -\frac{2}{\lambda-\mu}[S^0(\lambda) - S^0(\mu)]; \quad [S^0(\lambda), S^{\pm}(\mu)] = \frac{\mp 1}{\lambda-\mu}[S^{\pm}(\lambda) - S^{\pm}(\mu)]. \tag{2}$$

Условимся называть (1) операторами Годена, порожденными функцией $F(\lambda)$, если

$$S^0(\lambda)|0\rangle = F(\lambda)|0\rangle, \; S^-(\lambda)|0\rangle = 0, \tag{3}$$

где $|0\rangle$ – вакуумный вектор. Собственные векторы и собственные значения таких операторов находятся (так же как и в /1/) с помощью алгебраического анзатца Бете и равны

$$|M\rangle = \prod_{i=1}^{M} S^+(\xi_i)|0\rangle, \; E_M = F'(\lambda) + F^2(\lambda) + 2\sum_{i=1}^{M}[F(\lambda) - F(\xi_i)]/(\lambda - \xi_i), \tag{4}$$

где числа ξ_i удовлетворяют системе уравнений $\sum_k{}'(\xi_i - \xi_k)^{-1} + F(\xi_i) = 0$.

Если $F(\lambda)$ – рациональная функция, то (1) можно рассматривать как производящую функцию гамильтонианов магнетиков на конечномерных алгебрах Ли. Действительно, всякая рациональная функция представима в виде линейной комбинации конечного числа элементарных рациональных функций $\omega_a(\lambda)$, для которых справедливы теоремы сложения

$$[\omega_a(\lambda) - \omega_a(\xi)]/(\lambda - \xi) = C_a^{\beta\gamma}\omega_\beta(\xi)\omega_\gamma(\lambda), \; \omega_a(\lambda)\omega_\beta(\lambda) = D^\gamma_{a\beta}\omega_\gamma(\lambda), \tag{5}$$

где $C_a^{\beta\gamma}$ и $D^\gamma_{a\beta}$ – структурные константы; по повторяющимся греческим индексам здесь и далее предполагается суммирование; все суммы в (5) конечны. Если $F(\lambda)$ имеет вид

$$F(\lambda) = f^a\omega_a(\lambda), \tag{6}$$

то, в силу (2) и (3), $S^{0,\pm}(\lambda)$ следует искать в аналогичном виде:

$$S^{0,\pm}(\lambda) = S^a_{0,\pm}\omega_a(\lambda), \tag{7}$$

где $S^a_{0,\pm}$ – неизвестные операторы. Подставив (7) в (2) и воспользовавшись (5), находим, что $S^a_{0,\pm}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям конечномерной алгебры Ли:

$$[S^{\alpha}_{-}, S^{\beta}_{+}] = 2C^{\alpha\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{0}, \quad [S^{\alpha}_{0}, S^{\beta}_{\pm}] = \pm C^{\alpha\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{\pm}. \tag{8}$$

Подстановка (7) в (1) дает $\vec{S}(\lambda)\vec{S}(\lambda) = H^{\alpha}\omega_{\alpha}(\lambda)$, где

$$H^{\alpha} = D^{\alpha}_{\beta\gamma}(S_0^{\beta}S_0^{\gamma} - \frac{1}{2}S^{\beta}_{-}S^{\gamma}_{+} - \frac{1}{2}S^{\beta}_{+}S^{\gamma}_{-}) \equiv D^{\alpha}_{\beta\gamma}\vec{S}^{\beta}\vec{S}^{\gamma} \tag{9}$$

– коммутирующие между собой операторы, гамильтонианы магнетиков на алгебре (8). В силу (4) – (6) собственные значения этих операторов на векторах $|M\rangle$ равны:

$$E^{\alpha}_{M} = f^{\delta}C^{\beta\gamma}_{\delta}D^{\alpha}_{\beta\gamma} + f^{\beta}f^{\gamma}D^{\alpha}_{\beta\gamma} + f^{\gamma}C^{\beta\alpha}_{\gamma}\sum_{i=1}^{M}\omega_{\beta}(\xi_i).$$

В работе /2/ показано, что каждой модели Годена с рациональной функцией $F(\lambda)$ можно сопоставить квазиточнорешаемую модель. Действительно, пусть $H^0 = c_{\alpha}H^{\alpha}$, а U^{α} – произвольный оператор, действующий в том же пространстве, что и H^{α}. Рассмотрим уравнение

$$[H^{\alpha} + U^{\alpha}(H^0 - e^0)]\varphi = e^{\alpha}\varphi. \tag{10}$$

При произвольных значениях числового параметра e^0 спектральное уравнение (10) не имеет точных решений, однако, если e^0 совпадает с собственным значением оператора H^0, т. е. $e^0 = c_{\alpha}E^{\alpha}_{M}$, то решениями (10) являются $\varphi = |M\rangle$ и $e^{\alpha} = E^{\alpha}_{M}$. Для того, чтобы при фиксированном операторе в левой части (10) это уравнение имело несколько точных решений, одному и тому же собственному значению e^0 оператора H^0 должно соответствовать несколько собственных значений e^{α} оператора H^{α}. Такое вырождение возможно, если в системе гамильтонианов (9) имеется скрытая симметрия, относительно которой оператор H^0 инвариантен, а оператор H^{α} – нет. При этом количество точных решений уравнения (10) очевидно равно размерности представления алгебры этой симметрии g. Для доказательства существования g заметим, что любая функция $F(\lambda)$ вида (6) совпадает с функцией $F(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N} f_{\alpha}(\lambda - a_{\alpha})^{-1}$ с некоторым N или получается из нее в результате вырождения. Поэтому доказательство достаточно провести для невырожденного случая, а процедуру вырождения, если она окажется необходимой, совершить в полученных ответах. Невырожденные операторы $S^{0,\pm}(\lambda)$ имеют вид: $S^{0,\pm}(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N} S^{\alpha}_{0,\pm}(\lambda - a_{\alpha})^{-1}$, где $S^{\alpha}_{0,\pm}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $sl(2) \oplus \ldots \oplus sl(2)$ (N раз): $[S^{\alpha}_{0}, S^{\alpha}_{\pm}] = \pm S^{\alpha}_{\pm}$, $[S^{\alpha}_{-}, S^{\alpha}_{+}] = 2S^{\alpha}_{0}$. В этом случае для гамильтонианов H^{α} имеем

$$H^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N}{}' \vec{S}^{\alpha}\vec{S}^{\beta}/(a_{\alpha} - a_{\beta}). \tag{11}$$

Оператор $H^0 \equiv a_{\alpha}H^{\alpha}$ коммутирует со всеми H^{α} и имеет вид

$$H^0 = (\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{S}^{\alpha})^2. \tag{12}$$

Поскольку он не зависит от a_{α}, то должен коммутировать и со всеми операторами

$$\tilde{H}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N}{}' \vec{S}^{\alpha}\vec{S}^{\beta}/(\eta_{\alpha} - \eta_{\beta}), \tag{13}$$

в которых $\eta_1, \ldots, \eta_N$ – произвольные числа. При этом операторы (13) не коммутируют с (11), что дает основание считать (13) производящей функцией для образующих алгебры симметрии оператора H^0. Можно показать, что эти образующие имеют вид $L^{\alpha_1\alpha_2} = \vec{S}^{\alpha_1}\vec{S}^{\alpha_2}_{\alpha_1}$. Попытки замкнуть алгебру этих операторов приводят к новым элементам алгебры вида $L^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = S^{\alpha_1}_{i_1} \ldots S^{\alpha_n}_{i_n} f_{i_1 \ldots i_n}$, где $f_{i_1 \ldots i_n}$ – тензор, составленный из формы Киллинга – Картана и структурных констант алгебры $sl(2)$. Таким образом, видно, что искомая алгебра симметрии существует. Тот факт, что она оказалась бесконечномерной, указывает, что получена не сама алгебра g, а ее универсальная обертывающая алгебра $U(g)$. Для построения собственно алгебры воспользуемся дифференциальной реализацией операторов $S^{\alpha}_{0,\pm}$: $S^{\alpha}_{-} = t_{\alpha}\partial^2/\partial t^2_{\alpha} + 2f_{\alpha}\partial/\partial t_{\alpha}$, $S^{\alpha}_{0} = t_{\alpha}\partial/\partial t_{\alpha} + f_{\alpha}$, $S^{\alpha}_{+} = t_{\alpha}$, из которой следует, что

$$\vec{S}^{\alpha}\vec{S}^{\beta} = t_{\alpha}t_{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial t_{\beta}}\right)^2 + 2(f_{\alpha}t_{\beta} - f_{\beta}t_{\alpha})\left(\frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial t_{\beta}}\right). \qquad (14)$$

Совершив в (14) замену переменных $t_n = x_1 + \ldots + x_{N-1} + cx_N$, $t_{\alpha} = -x_{\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, N-1$, убеждаемся, что переписанные в терминах x_{α}-переменных операторы $\vec{S}^{\alpha}\vec{S}^{\beta}$ не содержат дифференцирований по переменной x_N. Тем самым x_N приобретает смысл внешнего параметра, который можно опустить, положив $c = 0$ и не изменяя при этом алгебраической структуры модели Годена. В этом случае оператор H^0, определяемый формулой (12), приобретает вид:

$$H^0 = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_{N-1}\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}\right)^2 + 2(b_1 + \ldots + b_N)\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_{N-1}\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}\right),$$

а операторы H^{α} представляются в виде билинейных комбинаций операторов $x_{\beta}\partial/\partial x_{\gamma}$. Очевидно, что H^0 коммутирует со всеми операторами $x_{\beta}\partial/\partial x_{\gamma}$, которые замыкаются в алгебру $gl(N-1)$, являющуюся прямой суммой алгебр $gl(1)$ и $sl(N-1)$. Образующими этих алгебр являются: $J_0 = (x_1\partial/\partial x_1 + \ldots + x_{N-1}\partial/\partial x_{N-1})$ (для $gl(1)$) и $\{I_i\} = (x_{\beta}\partial/\partial x_{\gamma}, \beta \neq \gamma, x_{\gamma}\partial/\partial x_{\gamma} - x_{\gamma+1}\partial/\partial x_{\gamma+1}, \gamma = 1, \ldots, N-2)$ (для $sl(N-1)$). Поэтому можем записать:

$$\begin{gathered} H^0 = J_0^2 + BJ_0, \ J_0 \in gl(1), \\ H^{\alpha} = A^{\alpha}_{ik}I_iI_k + A^{\alpha}_{i}I_iJ_0 + A^{\alpha}J_0^2, \ I_i \in sl(N-1), \end{gathered} \qquad (15)$$

где A^{α}_{ik}, A^{α}_{i}, A^{α} – коэффициенты, явный вид которых находим путем непосредственной подстановки (14) в (11). Из (15) следует, что алгеброй скрытой симметрии g является алгебра $sl(N-1)$, действующая в пространстве однородных полиномов от $x_1, \ldots, x_{N-1}$ степеней $M = 0, 1, 2, \ldots$. Размерность представления этой алгебры определяется количеством линейно-независимых членов в полиноме при данном M. Поэтому рассматриваемые представления являются векторными.

Любой однородный полином является собственным вектором оператора J_0. Собственным значением при этом служит число M – степень полинома. Кроме того, J_0 коммутирует со всеми однородными функциями степени нуль. Поэтому, если искать решения уравнения (10) в виде $\varphi = x^M_{N-1}P(x_1/x_{N-1}, \ldots, x_{N-2}/x_{N-1})$, то переменные x_{N-1} и $z_{\alpha} = x_{\alpha}/x_{N-1}$, $\alpha = 1, \ldots, N-2$ в нем разделяются и оно приобретает вид уравнения Шредингера для квантового волчка на алгебре $sl(N-1)$ в векторном представлении: $(A^{\alpha}_{ik}I_iI_k + MA^{\alpha}_{i}I_i + M^2A^{\alpha})P = e^{\alpha}P$. Дифференциальные выражения для операторов I_i в случае алгебры $sl(3)$ приведены в /3/.

Таким образом, установлена связь между алгебраическим /3/ и аналитическим /2/ подходами к проблеме квазиточнорешаемости в квантовой механике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годен М. Волновая функция Бете, М., Мир, 1987.
2. Ушверидзе А. Г. ЭЧАЯ, **20**, 1185 (1989).
3. Shifman M. Preprint CERN TH-1211, 1988.

Поступила в редакцию 19 июля 1989 г.