УДК 530.145+535.33

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДЕЙСТВИИ: ЧАСТИЧНАЯ ТОМОГРАФИЯ МНОГОМОДОВОГО КВАНТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. П. Карасев

Показана ключевая роль введенных ранее поляризационных когерентных состояний (группы $SU(2)_p$) в поляризационной томографии многомодового излучения: частичной (достаточной для поляризационного анализа) реконструкции квантовых состояний поля на основе только поляризационных измерений.

Квантовая томография световых полей. Математический аппарат обобщенных когерентных состояний групп динамической симметрии весьма эффективен при решении различных физических задач [1]. В поляризационной оптике группой динамической симметрии, управляющей эволюцией операторов вектора Стокса $\vec{\Sigma}$ (или поляризационного (P) квазиспина $\mathbf{P} \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma} = (P_\alpha)$), является [2] группа $SU(2)_p = \{D(\omega; \mathbf{n}) \equiv \exp(-i\omega \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}) : \mathbf{n} = \mathbf{n}(\theta, \phi), 0 \leq \omega \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$, где

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{P} \equiv P_0(\mathbf{n}) = S_{\mathbf{P}}(\xi) P_0 S_{\mathbf{P}}^{-1}(\xi) = P_0 \cos\theta + P_1 \sin\theta\cos\phi + P_2 \sin\theta \sin\phi, \xi = -\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad (1)$$

$S_{\mathbf{P}}(\xi) \equiv \exp(\xi P_+ - \xi^* P_+)$ – частный оператор группы $SU(2)_p$ и удовлетворяющие коммутационным соотношениям для момента количества движения [3] компоненты P-квазиспина $P_\pm \equiv P_1 \pm iP_2$, P_0 задаются через операторы рождения и уничтожения фотонов $a^+_\pm(j)$, $a_\pm(j)$ в пространственно-временных модах $j \leq m$ с круговыми поляризациями в виде [2, 4]

$$P_\alpha = \sum_{j=1}^{m} P_\alpha(j), P_\pm(j) = a^+_\pm(j) a_\mp(j), P_0(j) = \frac{1}{2}[N_+(j) - N^+_-(j)], N_\pm(j) = a^+_\pm(j) a_\pm(j). \quad (2)$$

Обобщенные когерентные состояния группы $SU(2)_p$ $|\xi; \psi_0 \ > \equiv |\theta, \phi; \psi_0 \ > = S_{\mathbf{P}}(\xi)|\psi_0 >$, где $|\psi_0 \ >$ – некоторые эталонные векторы состояний, были введены в

[4, 5] под названием поляризационных когерентных состояний (ПКС) и эффективно использовались при анализе проблем поляризационного сжатия [5, 6], поляризационных геометрических фаз [5] и квазиклассического описания поляризации квантового света в терминах функций квазивероятностей [7]. Однако существует другая важная область их применения, которой в последнее время уделяется большое внимание [8 – 11]: квантовая томография состояний поля – реконструкция задаваемых оператором плотности ρ квантовых состояний получаемого от различных источников излучения на основе экспериментальных данных.

Ключевая роль в томографии световых полей принадлежит [11] полевой симметризованной характеристической функции $\chi^\rho(\eta = \{\eta_\pm(i)\})$ и полевой функции Вигнера $W^\rho(\alpha = \{\alpha_\pm(i)\})$:

$$\chi^\rho(-\eta) =< D(\eta) >\equiv Tr[\rho D(\eta)],\ D(\eta) = \exp(\eta \cdot a^+ - \eta^* \cdot a), \tag{3}$$

$$W^\rho(\alpha) = \frac{1}{\pi^{2m}} \int \prod_{i=1}^{m} \prod_{\beta=\pm} dRe\eta_\beta(i) dIm\eta_\beta(i) \chi^\rho(\eta) e^{(\eta\cdot\alpha^* - \eta^*\cdot\alpha)} = Tr[\rho \hat{W}(\alpha)^\dagger], \tag{4}$$

которые задают (параметризуемые точками $\alpha_\pm(i)$ полевой фазовой гиперплоскости C^{2m} [1]) "непрерывные" представления оператора плотности ρ, ассоциированные с глауберовскими когерентными состояниями поля $|\{\eta_\pm(i)\} >= D(\eta)|0>$ ($\eta \cdot a^+ = \sum_{i=1}^m \sum_\beta \eta_\beta(i) a_\beta^+(i)$, $\eta\cdot\alpha^* = \sum_{i=1}^m \sum_\beta \eta_\beta(i)\alpha_\beta^*(i)$, $\hat{W}(\alpha)$ – полевой оператор Вигнера [1,12]).

Наиболее распространенная схема [11] полевой квантовой томографии основана на соотношениях, связывающих (4) с определяемыми экспериментально [9] распределениями

$$p(x^{j;\pm}, \phi^\pm(j)) =< x_\phi(j;\pm)|\rho|x_\phi(j;\pm) >: X_\phi(j;\pm)|x_\phi(j;\pm) >= x(j;\pm)|x_\phi(j;\pm) > \tag{5}$$

собственных значений $x(j;\pm)$ "повернутых" полевых квадратур

$$X_\phi(j;\pm) = [a_\pm^+(j) e^{i\phi^\pm(j)} + a_\pm(j) e^{-i\phi^\pm(j)}]/2. \tag{6}$$

Так, например, в случае одномодового поля функция Вигнера $W^\rho(\alpha)$ определяется с помощью обращения преобразования Радона для $p(x,\phi)$ [8]:

$$W^\rho(\alpha) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x,\phi) K(x - \alpha_\phi),\ K(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+} Re\frac{1}{(x+i\epsilon)^2}. \tag{7}$$

Аналогичные соотношения для многомодовых полей были получены в [10].

Указанные схемы, хотя и позволяют полностью восстановить изучаемое квантовое состояние поля, требуют значительных экспериментальных усилий [11]. Однако для многомодовых световых полей имеются ситуации, когда можно ограничиться их (экспериментально более простой) частичной томографией, т.е., восстановлением не полной, а редуцированной матрицы плотности поля. Например, в случае, когда анализируются только поляризационные свойства световых полей, все динамические переменные A зависят от $a^{+}_{\pm}(j)$, $a_{\pm}(j)$ не произвольным образом, а только через их билинейные комбинации (2) – компоненты P-квазиспина: $A = A(\mathbf{P})$. Это позволяет ввести в фоковском пространстве $L_F(2m) = Span\{|\{n_{\pm}(i) : 1 \leq i \leq m\} >\}$ специальный (поляризационный) базис $\{|p, \mu; \lambda >= \sum_{[n_{\pm}(i)]} C^{p,\mu;\lambda}_{[n_{\pm}(i)]}|\{n_{\pm}(i)\} >\}$ ($p = 0, 1/2, 1, ..., -p \leq \mu \leq p$ – значения полных P-квазиспина и его проекции (спиральности), λ – набор $SU(2)_p$-инвариантных (неполяризационных) индексов, $C^{p,\mu;\lambda}_{[n_{\pm}(i)]}$ – (обобщенные) коэффициенты Клебша – Гордана группы $SU(2)_p$) [2, 7]. В этом базисе матричные элементы операторов $A(\mathbf{P})$ имеют вид

$$< p', \mu'; \lambda'|A(\mathbf{P})|p, \mu; \lambda >= \delta_{p,p'}\delta_{\lambda,\lambda'}A^p_{\mu',\mu}, \tag{8}$$

где $A^p_{\mu',\mu}$ зависят только от квантовых чисел p, μ', μ. Это упрощает вычисление квантовых средних $< A(\mathbf{P}) >= Tr[\rho A(\mathbf{P})]$ с помощью редукции полевой матрицы плотности путем суммирования (или интегрирования – в непрерывном представлении) по неполяризационным индексам [7]. Соответственно, приходим к задаче восстановления такой редуцированной (поляризационной) матрицы плотности световых полей только из поляризационных измерений – поляризационной томографии, определяемой поляризационными аналогами соотношений (3) – (7); это и будет предметом оставшейся части работы.

Поляризационная матрица плотности многомодовых световых полей: дискретные и непрерывные представления. В поляризационном базисе $\{|p, \mu; \lambda >\}$ полевой оператор плотности ρ имеет вид [7]: $\rho = \sum_{p,\mu,\lambda;p',\mu',\lambda'} R^{p',\mu';\lambda'}_{p,\mu;\lambda}|p, \mu; \lambda >< p', \mu'; \lambda'|$, где матричные элементы $R^{p',\mu';\lambda'}_{p,\mu;\lambda}$ определяют полную полевую матрицу плотности. Тогда с учетом (8) квантовые средние $< A(\mathbf{P}) >$ "поляризационных" операторов $A(\mathbf{P})$ задаются соотношениями

$$< A(\mathbf{P}) >= Tr[\rho A(\mathbf{P})] = \sum_{\mu,\mu'} R^p_{\mu,\mu'}A^p_{\mu',\mu}, \quad R^p_{\mu',\mu} = \sum_{\lambda} R^{p,\mu';\lambda}_{p,\mu;\lambda}, \tag{9}$$

где величины $R^p_{\mu,\mu'}$ определяют поляризационную матрицу плотности (ПМП) $R_P = \|R^p_{\mu,\mu'}\|$ излучения, которая задает его *все поляризационные* свойства [7].

Альтернативное дискретное представление ПМП R_P и произвольных поляризационных операторов $A(\mathbf{P})$ получим, используя их (распространенное в анализе спиновых систем [3, 13]) разложение по единичным тензорным операторам Вигнера группы

$SU(2)_p \hat{W}^{p;\lambda}_{l,m}$:

$$\hat{W}^{p;\lambda}_{l,m} = \sum_{\mu,\mu'} (-1)^{p-\mu'} C^{l,m}_{p,\mu;p,-\mu'} |p,\mu;\lambda><p,\mu';\lambda|, \; Tr[\hat{W}^{p;\lambda\dagger}_{l,m} \hat{W}^{p';\lambda'}_{l',m'}] = \delta_{p,p'}\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (10)$$

где $C^{l,m}_{p,\mu;p,-\mu'}$ – обычные коэффициенты Клебша – Гордана группы $SU(2)_p$. Тогда в силу (10) соотношение (9) принимает вид $<A>=\sum_{lm} R^p_{lm} \tilde{A}^p_{lm}$, где величины

$$R^p_{lm} = \sum_{\mu,\mu'} R^p_{\mu',\mu} (-1)^{p-\mu} C^{l,m}_{p,\mu';p,-\mu}, \quad \tilde{A}^p_{lm} = \sum_{\mu,\mu'} A^p_{\mu,\mu'} (-1)^{p-\mu} C^{l,m}_{p,\mu';p,-\mu} \quad (11)$$

определяют $SU(2)_p$-тензорные представления ПМП R_P и поляризационных операторов $A(\mathbf{P})$.

Рассмотрим "непрерывные" представления ПМП, задаваемые различными типами (P, Q и Вигнера) поляризационных функций квазивероятностей [7]. Поляризационные P, Q-функции были подробно изучены в [7], а поляризационные функции Вигнера (ПФВ) можно определить либо путем явного введения (определяющих сферу Пуанкаре $S^2(\mathbf{n})$: $\sum_{i=1,2,0} <P_i>^2 = r_P^2$) поляризационных углов θ, ϕ и r_P в параметры $\alpha_\pm(i)$ в формуле (4) и последующего интегрирования по $SU(2)$-инвариантным параметрам (ср. [7]), либо, используя формальное сходство P-квазиспина с обычным спином. Первый способ, определяющий ПФВ как редукцию полевой функции Вигнера (4), полезен при реконструкции последней с использованием данных поляризационных измерений. Однако для анализа и реконструкции только поляризационной структуры световых пучков более адекватен второй способ, основанный на использовании поляризационной характеристической функции (ПХФ) $\chi^{\mathbf{P}}(\vec{\eta})$, которую по аналогии с (3) можно определить следующим образом [7]:

$$\chi^{\mathbf{P}}(-\vec{\eta} = \omega\mathbf{n}) = <D(\omega;\mathbf{n})> \equiv Tr[\hat{\rho}_f \exp(i\vec{\eta}\cdot\mathbf{P})] = \sum R^p_{\mu,\mu'} D^p_{\mu',\mu}(\omega;\mathbf{n}), \quad (12)$$

где в соответствии с (8) матричные элементы $D^p_{\mu',\mu}(\omega;\mathbf{n}) = <p,\mu';\lambda|D(\omega,\mathbf{n})|p,\mu;\lambda>$ преобразований группы $SU(2)_p$ не зависят от квантовых чисел λ, определяются в терминах сферических функций $Y_{lm}(\theta,\phi)$ и обобщенных характеров $\chi^p_l(\omega)$ группы $SU(2)$ [3]:

$$D^p_{\mu,\mu'}(\omega;\mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{2p} \sum_{m=-l}^{l} (-1)^l \frac{2l+1}{2p+1} \chi^p_l(\omega) C^{p,\mu'}_{p,\mu;l,m} \sqrt{4\pi/(2l+1)}\, Y_{lm}(\theta,\phi) \quad (13)$$

и образуют полную ортонормированную систему на трехмерной сфере $S^3 = S^3(\omega;\mathbf{n})$.

Заменяя в (4) $\chi^\rho(\eta)$ из (3) на $\chi^{\mathbf{P}}(\vec{\eta})$ из (12) и осуществляя стандартное (экспоненциальное) фурье-преобразование из S^3 на S^2, можно определить ПФВ как прямой аналог

(4) [12]. Это определение обеспечивает с помощью соотношений ортогональности для $Y_{lm}(\theta,\phi)$ полную томографию спиновых систем; однако такая процедура для систем с *переменным* P-квазиспином (как это имеет место для световых полей [2]) позволяет определить только $\sum_{p=0,1/2,\ldots} R^p_{lm}$, а не R^p_{lm} или $R^p_{\mu\mu'}$. Этот недостаток устраняется, если определить (по аналогии с поляризационными P, Q-функциями [7]) семейство ПФВ $W^p_{\mathbf{P}}(\mathbf{n})$, $p = 0, 1/2, 1, \ldots$:

$$W^p(\mathbf{n}_1) = \sqrt{\frac{2p+1}{4\pi}}\sum_{l=0}^{2p}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\mu=-p}^{p}(-1)^{p-\mu'}\int d\mu(\omega;\mathbf{n})\chi^{\mathbf{P}}_W(\vec{\eta})D^{p*}_{\mu',\mu}(-\omega;\mathbf{n})C^{l,m}_{p,\mu;\,p,-\mu'}Y_{lm}(\mathbf{n}_1) =$$

$$Tr[\hat{\rho}W^{p\dagger}(\mathbf{n}_1)],\ d\mu(\omega;\mathbf{n}) \equiv (4\pi^2)^{-1}\sin^2\frac{\omega}{2}d\omega\sin\theta d\theta d\phi, \qquad (14)$$

где $W^p(\mathbf{n})$ – поляризационные аналоги полевого оператора Вигнера в (4), задающие "непрерывные" представления операторов $\hat{W}^{p;\lambda}_{l,m}$ с помощью $D^p(\omega;\mathbf{n})$).

Определение (14) позволяет осуществлять полную поляризационную томографию световых пучков, поскольку из него с помощью соотношений ортогональности для $D^p_{\mu',\mu}(\omega;\mathbf{n})$ можно получить связь ПФВ с "дискретными" матричными элементами ПМП R^p_{lm}:

$$W^p(\mathbf{n}) = \sum_{l,m}\frac{R^p_{lm}}{\sqrt{(2p+1)4\pi}}Y_{lm}(\mathbf{n}),\ \frac{R^p_{lm}}{\sqrt{(2p+1)4\pi}} = \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi W^p(\mathbf{n})Y^*_{lm}(\theta,\phi), \quad (15)$$

которая аналогична определению ПФВ для спиновых систем [13]. Заметим, что эти свойства $D^p_{\mu',\mu}(\omega;\mathbf{n})$ позволяют также найти из (12) матричные элементы $R^p_{\mu,\mu'}$ ПМП по ПХФ $\chi^{\mathbf{P}}(-\vec{\eta})$:

$$R^p_{\mu,\mu'} = \frac{2p+1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\omega}{2}d\omega\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi D^{p*}_{\mu',\mu}(\omega;\mathbf{n})\chi^{\mathbf{P}}(-\vec{\eta}). \qquad (16)$$

Полученные формулы (11) – (16) позволяют перейти к заключительному этапу поляризационной томографии – нахождению матричных элементов R^p_{lm} и $R^p_{\mu,\mu'}$ ПМП в дискретных базисах или ПФВ $W^p(\mathbf{n})$ по экспериментальным данным поляризационных измерений, которые согласно (2) имеют чисто энергетическую природу и осуществляются непосредственно с помощью фотодетектирования (см., например, [6]).

Поляризационная томография: определение ПМП и ПФВ из экспериментальных данных. Для поляризационной оптики аналогами (6), (5) являются операторы $P_0(\mathrm{n})$ из (1) и распределения $p(\mu;\mathbf{n}) = \sum_{p,\lambda} <\ \xi;p,\mu;\lambda|\rho|\xi;p,\mu;\lambda\ >$: $P_0(\mathbf{n})|\xi;p,\mu;\lambda\ >= \mu|\xi;p,\mu;\lambda>$ собственных значений μ операторов $P_0(\mathbf{n})$ при всевозможных углах θ, ϕ, где $|\xi;p,\mu;\lambda>= S_{\mathbf{P}}(\xi)|p,\mu;\lambda>$ – ПКС, порождаемые эталонными векторами $|p,\pi;\lambda>$.

Вычисляя (12) в базисе ПКС $\{|\xi; p, \mu; \lambda>\}$,

$$\chi^{\mathbf{P}}(\vec{\eta}) = \sum_{M=-\infty/2}^{\infty/2} p(M; \mathbf{n}) e^{-i\omega M}, \tag{17}$$

можно определить поляризационные аналоги соотношения (7). Действительно, подставляя (17) в (16) и используя соотношения ортогональности для $D^p_{\mu',\mu}(\omega; \mathbf{n})$, находим

$$R^p_{\mu',\mu} = \sum_{l=0}^{2p} \sum_{m=-l}^{l} C^{p\mu'}_{p\mu\, lm} \sum_{M=-\infty/2}^{\infty/2} K^p_l(M) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y^*_{lm}(\theta, \phi) p(M; \mathbf{n}), \tag{18}$$

где $K^p_l(M)$ (поляризационный аналог ядра $K(x)$ в (7)) определяется формулой

$$K^p_l(M) = \frac{(-i)^l}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega M} \chi^p_l(\omega) \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega = \frac{(-i)^{l-1}}{2\pi} \sum_{m=-l}^{l} \frac{[(-1)^{2(M-m)} - 1] C^{pm}_{pm\, l0}}{(m-M)[(m-M)^2 - 1]}. \tag{19}$$

Отсюда, подставляя (18) в (11) и используя соотношения ортогональности для коэффициентов Клебша – Гордана группы $SU(2)$ [3], можно найти аналогичные выражения для R^p_{lm}, а затем с помощью (15) – и для $W^p(\mathbf{n})$.

Заключение. Формулы (11) – (19) полностью решают задачу реконструкции поляризационной структуры световых полей по распределениям $p(\mu; \mathbf{n})$, определяемым с помощью ПКС и задаваемым экспериментально гистограммами. Из определения (12) следует также правило изменения $\chi^{\mathbf{P}}(-\vec{\eta})$ под действием "поляризационного" вращателя с оператором эволюции $U_{\mathbf{P}}(t) = \exp(-i\eta_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{P})$, $\eta_1 = \hbar^{-1} bt$:

$$\chi^{\mathbf{P}}(-\vec{\eta}) \to \chi^{\mathbf{P}}(-\vec{\eta}; t) = Tr[U_{\mathbf{P}}(t) \rho U^{\dagger}_{\mathbf{P}}(t) \exp(i\vec{\eta} \cdot \mathbf{P})] = Tr[\rho \exp(i\vec{\eta} \cdot U^{\dagger}_{\mathbf{P}}(t) \mathbf{P} U_{\mathbf{P}}(t))] =$$

$$Tr[\rho \exp(i\eta_\mu D^1_{\mu',\mu}(-\eta_1; \mathbf{n}_1) P_{\mu'}] = \chi^{\mathbf{P}}(-\vec{\eta}(t)), \vec{\eta}(t) = (\eta_{\mu'}(t)), \eta_{\mu'}(t) = \eta_\mu D^1_{\mu',\mu}(-\eta_1; \mathbf{n}_1),$$

позволяющее определить преобразование ПФВ после прохождения световых пучков через различные поляризационные устройства (ср. [5]). Таким образом, полученные результаты вместе с [7] показывают важное практическое значение ПКС в поляризационной оптике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.

[2] Karassiov V. P. J. Phys., **A26**, 4345 (1993).

[3] Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента, Ленинград, Наука, 1975.

[4] Карасев В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5-6, 24 (1993).

[5] Karassiov V. P. E-archive QUANT-PHYS/9503011 (1995).

[6] Karassiov V. P. Phys. Lett., **A190**, 387 (1994).

[7] Карасев В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9-10, 13 (1996).

[8] Vogel K. and Risken H. Phys. Rev., **A40**, 2847 (1987).

[9] Smithey D. T., Beck M., Raymer M. G. and Faridani A. Phys. Rev. Lett., **70**, 1244 (1993).

[10] Kühn H., Welsh D.-G. and Vogel W. Phys. Rev., **A51**, 4240 (1995).

[11] Buzek V., Adam G. and Drobny G. Ann. Phys. (N.Y.), **245**, 37 (1996).

[12] Wolf K. B., Atakishiyev N. M., Cumakov S. M. Proc. 5th Wigner Symposium, Singapore, World Scientific, 1998, p. 370.

[13] Agarwal G. S. Proc. 5th Wigner Symposium, World Scientific, Singapore, 1998, p. 313.

Поступила в редакцию 12 сентября 1999 г.