Краткие сообщения по физике № 3-1987 г.

УДК 535.2.01

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФАЗЫ СВЕТОВОГО ПОЛЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников, В.В. Котляр, А.Н. Малов

Рассмотрены способы восстановления фазы светового поля по измерениям зависимости двумерного распределения интенсивности от параметров оптической системы.

Под фазовой проблемой в оптике понимается восстановление комплексной амплитуды светового поля вблизи поверхности объекта по измерениям интенсивности рассеянного им когерентного монохроматического света. Восстановление фазы светового поля без специального формирования опорного пучка может быть использовано при создании систем контроля качества поверхности с пониженными требованиями к виброзащищенности.

Комплексная амплитуда в плоскости изображения $F(x_1, x_2)$ связана преобразованием Фурье с амплитудой на выходном зрачке оптической системы $u(\xi_1, \xi_2)$:

$$F(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int u(\xi_1, \xi_2)\exp[-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2, \qquad (1)$$

где $u(\xi_1, \xi_2) = P(\xi_1, \xi_2)f(\xi_1, \xi_2)$; $P(\xi_1, \xi_2)$ – комплексная функция зрачка оптической системы; $f(\xi_1, \xi_2)$ – фурье-спектр изображения. Очевидно, что $F(x_1, x_2)$ и $I(x_1, x_2) = F(x_1, x_2)\bar{F}(x_1, x_2)$ зависят от параметров оптической системы, характеризуемых функцией $P(\xi_1, \xi_2)$. Ниже рассматривается задача восстановления $F(x_1, x_2)$ по измерениям интенсивности $I(x_1, x_2)$ как функции этих параметров.

По аналогии с теорией аберраций представим $P(\xi_1, \xi_2)$ в виде: $P(\xi_1, \xi_2) = \chi(\xi_1, \xi_2)\exp[-iw(\xi_1, \xi_2)]$, где $\chi(\xi_1, \xi_2)$ – характеристическая функция зрачка;

$$w(\xi_1, \xi_2) = w_{11}\xi_1 + w_{12}\xi_2 + (w_{21} + w_0)\xi_1^2 + (w_{22} + w_0)\xi_2^2. \qquad (2)$$

Здесь w_{1k} описывает наклон волнового фронта, w_0 – дефокусировку, w_{2k} – астигматизм.

Представим w_{jk} в виде: $w_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}$, где α_{jk}, β_{jk} вещественны, j, k = 1,2. Тогда задача сводится к восстановлению $F(x_1, x_2)$ по измерениям интенсивности $I(x_1, x_2)$ и ее производных по α_{jk} и β_{jk}. Частные случаи задачи в подобной и иных постановках рассматривались в ряде работ. Так, в /1,2/ решена одномерная задача с $w(\xi_1, \xi_2) = w_{11}\xi_1$. В /3,4/ использован линейный амплитудный фильтр и доказана однозначность восстановления без построения алгоритма. В /5/ приведен алгоритм для линейного амплитудного фильтра на основании пяти измерений интенсивности. Задача с w_0 в одномерном случае решена в /6,7/. В работе /8/ построен рекурсивный алгоритм с использованием гауссова фильтра.

Из (1) и (2) следует, что функция $F(x_1, x_2, \alpha_{jk}, \beta_{jk})$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям (k = 1, 2):

$$L_{1k}F \equiv i\partial F/\partial\beta_{1k} + \partial F/\partial x_k = 0,$$

$$L_{2k}F \equiv i\partial F/\partial\alpha_{2k} + \partial^2 F/\partial x_k^2 = 0, \qquad (3)$$

$$L_{3k}F \equiv \partial F/\partial\beta_{2k} + \partial^2 F/\partial x_k^2 = 0.$$

Используя аналитическое продолжение $F(z_1, z_2)$ фукции $F(x_1, x_2)$, тождество $I(z_1, z_2) = F(z_1, z_2) \times \bar{F}(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ и действуя операторами уравнений (3) на $I(z_1, z_2)$, можно, как и в работе /7/, доказать соотношения

$$L_{1k}F = 2F\partial\bar{F}/\partial z_k,$$

$$\int\limits_{z_{ok}}^{z_k} L_{2k}F\,dz_k = 2F\partial\bar{F}/\partial z_k \Bigg|_{z_{ok}}^{z_k}, \quad k = 1, 2$$

и разделить нулевые поверхности $F(z_1, z_2)$ и $\bar{F}(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Это дает возможность (см. /9/) построить для $F(z_1, z_2)$ каноническую функцию.

Подставляя в уравнения (3) функцию $F(x_1, x_2)$ в виде $A(x_1, x_2)\exp[i\varphi(x_1, x_2)]$, где $A(x_1, x_2) = |F(x_1, x_2)|$, $\varphi(x_1, x_2) = \arg F(x_1, x_2)$ и разделяя вещественные и мнимые части, получим $(k = 1, 2)$:

$$\begin{gathered}
\partial A/\partial\beta_{1k} + A\partial\varphi/\partial x_k = 0, \\
\partial A/\partial\alpha_{2k} + 2(\partial A/\partial x_k)(\partial\varphi/\partial x_k) + A\partial^2\varphi/\partial x_k^2 = 0, \\
\partial A/\partial\beta_{2k} + \partial^2 A/\partial x_k^2 - A(\partial\varphi/\partial x_k)^2 = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

В предположении $A(x_1, x_2) \neq 0$ из уравнений (4) находим:

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(0,0) - \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial A}{\partial\beta_{11}}(x, x_2)\frac{dx}{A(x, x_2)} - \int\limits_0^{x_2} \frac{\partial A}{\partial\beta_{12}}(0,y)\frac{dy}{A(0,y)};$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2) = \varphi(0,0) &- \int\limits_0^{x_1}\int\limits_a^{x} \frac{\partial A}{\partial\alpha_{21}}(t, x_2)A(t, x_2)\frac{dt\,dx}{A^2(x, x_2)} - \\
&- \int\limits_0^{x_2}\int\limits_b^{y} \frac{\partial A}{\partial\alpha_{22}}(0, t)A(0, t)\frac{dt\,dy}{A^2(0,y)} + c(a, x_2)\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{A^2(x, x^2)} + c_0\int\limits_0^{x_2}\frac{dy}{A^2(0,y)};
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2) = \varphi(0,0) &\pm \int\limits_0^{x_1}\left[\frac{\partial A}{\partial\beta_{21}}(x, x_2) + \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}(x, x_2)\right]^{1/2} A^{-1/2}(x, x_2)\,dx \pm \\
&\mp \int\limits_0^{x_2}\left[\frac{\partial A}{\partial\beta_{22}}(0,y) + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}(0,y)\right]^{1/2} A^{-1/2}(0,y)\,dy.
\end{aligned}$$

В формулах (5) константы $\varphi(0,0)$ тривиальны, процедура нахождения $c(a, x_2)$ и константы c_0 обсуждается в работе /7/. Из последнего выражения (5) видно, что выбор знаков дает четыре возможных решения. Заметим, однако, что сдвигом спектра объекта $f(\xi_1, \xi_2) \to f(\xi_1 + \Delta, \xi_2 + \Delta)$ можно создать линейный член $\Delta(x_1 + x_2)$ в фазе поля $F(x_1, x_2)$. Если он таков, что выполняются неравенства $|\partial\varphi/\partial x_1|$, $|\partial\varphi/\partial x_2| < \Delta$, то последнее уравнение системы (4) примет вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \Delta = \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_{2k}} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_k^2} \right)^{1/2} A^{-1/2}\,\mathrm{sign}\Delta, \ \ k = 1, 2.$$

При малых параметрах α_{jk}, β_{jk} производные в формулах (5) можно заменить на разностные отношения. Следовательно, для восстановления фазы поля достаточно измерения двух двумерных и одного одномерного распределения интенсивности.

Выбор фильтров с одним параметром типа $\exp[\alpha(\xi_1 + \xi_2)]$, $\exp[i\alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2)]$ и $\exp[\alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2)]$ приводит к дифференциальным уравнениям с частными производными первого и второго порядков, для решения которых требуется дополнительное знание фазы $\varphi(x_1, x_2)$ на некоторой линии в плоскости (x_1, x_2).

Выбор других типов $w(\xi_1, \xi_2)$ приводит либо к нелинейным системам дифференциальных уравнений относительно фазы, либо к линейным системам, но более высоких порядков по производным фазы.

Таким образом, в настоящей работе приведены три алгоритма, полученные на основе дифференциального подхода к фазовой проблеме в оптике. Они позволяют восстановить фазу волнового поля по измерениям зависимости двумерного распределения интенсивности от параметров оптической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Metha C. L. Nuovo Cimento, **36**, 202 (1965).
2. Kohler D., Mandel L. JOSA, **63**, 126 (1973).
3. Kiedron P. Optica Applicata, **10**, 483 (1980).
4. Kiedron P. Optik, **53**, 303 (1981).
5. Костометов Г. П., Кузьмина Н. В., Розанов Н. Н. Оптика и спектроскопия, **60**, 190 (1986).
6. Teaque M. R. JOSA, A2, 2019 (1985).
7. Абрамочкин Е. Г. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, 16 (1986).
8. Luille A. L., Poggio T. JOSA, A2, 683 (1985).
9. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971.

Поступила в редакцию 24 сентября 1986 г.
После переработки 22 декабря 1986 г.