

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ С НЕАБЕЛЕВОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ СИММЕТРИЕЙ

М.А. Соловьев

Рассмотрена модель с калибровочной $SO(N)$ -симметрией, описывающая при $N = 3$ динамику пространственно однородных полей Янга – Миллса. Методом коллективных координат вычислена энергия основного состояния в пределе больших N . Показано, что эффективный потенциал на пространстве орбит, в противоположность коллективному, в этой модели неограничен снизу.

Один из путей построения в квантовой хромодинамике последовательной схемы вычислений, не предполагающей малость взаимодействия, связан с использованием в качестве параметра разложения обратной степени числа цветов /1,2/. При исследовании приближений такого типа, называемых "пределом больших N ", наряду с полевыми полезны и конечномерные модели /3–5/. В данной работе рассматривается еще одна модель, задаваемая лагранжианом:

$$L = \frac{1}{2} \text{tr} (\dot{a} + a_0 a)^T (\dot{a} + a_0 a) - V_N(a^T a). \quad (1)$$

Здесь a – вещественная матрица $N \times N$; a_0 – антисимметричная матрица; t означает транспонирование; потенциал V_N имеет вид $N \text{tr} V(a^T a/N)$. При $N = 3$ в таком виде можно представить лагранжиан $SU(2)$ -теории Янга – Миллса, если считать калибровочные поля A зависящими лишь от времени и отождествить a с матрицей A_i^c , а a_0 – с матрицей, дуальной вектору A_0^c . Лагранжиан (1) инвариантен относительно калибровочных преобразований:

$$a \rightarrow ua, \quad a_0 \rightarrow ua_0 u^T + \dot{u} u^T,$$

где $u(t)$ – ортогональная матрица. Эта модель в ряде отношений существенно отличается от эрмитовой матричной модели /3,4/. Вычислим эффективные потенциалы в коллективных координатах /4/ и на пространстве орбит /6,7/. Попытки выяснить соотношение между ними имеются в /6,8/, причем авторы пришли к разным выводам. В данной модели различие между этими потенциалами видно особенно рельефно: если минимум первого дает правильное выражение для энергии основного состояния в пределе $N \rightarrow \infty$, то второй вообще не имеет минимума.

При квантовании используем стандартную калибровку $a_0 = 0$. Волновая функция любого физического состояния обладает калибровочной инвариантностью $\Psi(ua) = \Psi(a)$. Волновая функция основного состояния инвариантна также относительно умножения a на ортогональную матрицу справа и фактически определена на пространстве орбит, порождаемых действием группы $O(N) \times O(N)$. Это пространство можно отождествить с конусом K в R^N , сопоставляя a набор (x_1, \dots, x_N) неотрицательных и расположенных в порядке убывания собственных чисел матрицы $(a^T a)^{1/2}$. Однако удобнее рассматривать Ψ на всем R^N , подчинив ее условию симметрии относительно отражений и перестановок, поскольку K является факторпространством R^N по действию дискретной группы, порождаемой этими операциями. В координатах x_i метрика, индуцируемая на пространстве орбит метрикой $\text{tr} a^T b$, имеет евклидов вид. Обозначим через μ объем орбит. Формула $\int \Psi^* \Psi da = \int \Psi^* \Psi \mu dx$, справедливая для инвариантной функции, подсказывает замену $\Phi = \mu^{1/2} \Psi$, после которой уравнение Шредингера в переменных x_i принимает вид /7/:

$$i\hbar \partial \Phi / \partial t = - (\hbar^2 / 2) \Delta \Phi + V_{\text{eff}} \Phi, \quad V_{\text{eff}} = V_N + (\hbar^2 / 2) \mu^{-1/2} \Delta \mu^{1/2},$$

где μ есть объем системы векторов $\{\bar{e}_i\}$ в касательном к орбите пространстве, канонически соответствующей ортонормированному базису $\{e_i\}$ в алгебре Ли действующей группы. Иными словами, $\mu = (\det T)^{1/2}$, где оператор T действует в алгебре Ли, переводя элемент u в такой v , скалярное произведение которого с любым w равно (\bar{u}, \bar{w}) . В нашем случае вектором u служит пара антисимметричных матриц $\{u_1, u_2\}$,

$$\begin{aligned}\bar{u} &= (d/dt) (e^{tu_1} a e^{-tu_2})|_{t=0} = u_1 a - a u_2; & v_1 &= (1/2) (a a^T u_1 + u_1 a a^T) - a u_2 a^T, \\ v_2 &= (1/2) (a^T a u_2 + u_2 a^T a) - a^T u_1 a.\end{aligned}$$

В орбите каждой матрицы a имеется диагональная матрица, для которой собственные числа оператора T легко вычисляются и равны $(1/2) (x_i \pm x_j)^2$. Таким образом, $\mu = 2^{-N(N-1)/2} \prod_{i < j} (x_i^2 - x_j^2)$, что приводит

к формуле

$$V_{\text{eff}} = V_N - \frac{\hbar^2}{4} \sum_{i < j} [(x_i - x_j)^{-2} + (x_i + x_j)^{-2}]. \quad (2)$$

При вычислении V_{eff} полезно соотношение $f^{-1} \Delta f = \Delta \ln f + |\ln f|^2$, справедливое внутри конуса K . Определяя V_{eff} во всем R^N , необходимо уточнить, как понимается $\mu^{1/2}$, и дифференцировать эту функцию как обобщенную. Напомним /3/, что в эрмитовой матричной модели $\mu = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$, и $\mu^{1/2}$ естественно оп-

ределить как $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$, что приводит к антисимметрии Φ и равенству $V_{\text{eff}} = V_N$ во всем R^N . В резуль-

тате задача сводится к рассмотрению одномерного не взаимодействующего ферми-газа во внешнем поле $U_N(x) = NV(x^2/N)$. Напротив, в данном случае V_{eff} содержит своеобразное парное взаимодействие между "частицами", а также между "частицами" и их зеркальными изображениями. Этот факт не зависит от того, как определять функцию $\mu^{1/2}$, поэтому в дальнейшем считаем ее неотрицательной, а Φ симметричной. Входящее в V_{eff} притяжение является максимально сингулярным, поскольку коэффициент $\hbar^2/4$ в (2) равен критическому значению, за которым становится возможным "падение" на центр /9/. Эффективное парное взаимодействие возникает также в симплектической модели /10/, но там оно является отталкиванием. Модель (1) дает простой контраргумент к предположению /6/, что квазиклассический характер предела $N \rightarrow \infty$ объясняется притяжением к орбитам максимального объема. Таким образом, идея /6,7/ перехода к этому пределу в теории Янга - Миллса путем минимизации V_{eff} на пространстве орбит требует дальнейшего обоснования и выяснения роли приводимых полей, на которых объем калибровочных орбит обращается в нуль.

Вычислим эффективный потенциал методом коллективных координат /4/, который в сущности является развитием метода Хартри - Фока. В качестве коллективной переменной обычно берут плотность ρ и рассматривают Ψ при $N \rightarrow \infty$ как функционал ρ , заменяя уравнение Шредингера на уравнение в вариационных производных. В частности, кинетическая часть гамильтониана системы бозе-частиц переходит в

$$-\frac{\hbar^2}{2} \int dx \int dy \Omega(x, y; \rho) \frac{\delta^2}{\delta \rho(x) \delta \rho(y)} - \frac{\hbar^2}{2} \int dx \omega(x, \rho) \frac{\delta}{\delta \rho(x)},$$

$$\Omega(x, y; \rho) = \partial_x \partial_y (\delta(x - y) \rho(x)), \quad \omega(x, \rho) = \partial_x^2 \rho(x),$$

что получается применением цепного правила. Последующее исключение из уравнения члена с первой производной (путем переопределения волнового функционала, подобного переходу от Ψ к Φ выше) приводит к эффективному потенциалу

$$V_{\text{coll}}(\rho) = \int dx U(x) \rho(x) + \frac{\hbar^2}{8} \int dx \int dy \omega(x, \rho) \Omega^{-1}(x, y; \rho) \omega(y, \rho).$$

Конкретизация метода коллективных координат для матричных моделей дана в /4, 10/, где показано, что в случае эрмитовой и симплектической моделей он правильно воспроизводит предел больших N . Мы будем действовать иначе, исходя из уравнения Шредингера для Ψ в переменных x_i . Учитывая формулы

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_{ii}} = 1, \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_{ij}^2} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_{ji}^2} = \frac{x_i}{x_i^2 - x_j^2} \quad (3)$$

и равенство нулю остальных низших производных, нетрудно убедиться, что это уравнение имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \Psi - \frac{\hbar^2}{2} \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \sum_{j \neq i} \left[\frac{1}{x_i - x_j} + \frac{1}{x_i + x_j} \right] + V_N \Psi. \quad (4)$$

Формулы (3) можно использовать и для вывода (2). Ясно, что члены с первой производной в правой части (4) приводят к добавлению к ω величины

$$\omega_{\text{add}} = \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \sum_{j \neq i} [(x_i - x_j)^{-1} + (x_i + x_j)^{-1}], \quad (5)$$

которую надо выразить как функционал от ρ . Особенностью метода коллективных координат, неизбежной, видимо, при замене конечного числа переменных бесконечным, является то, что формулы вначале пишутся эвристически и содержат неопределенности. Рецепт их уточнения состоит в переходе к импульсному представлению. Покажем, что (5) следует понимать как

$$-2\partial_x \int dy \frac{\rho(x) \rho(y)}{x - y} - \partial_x^2 \rho(x), \quad (6)$$

определяя интеграл в смысле главного значения. В импульсном представлении (6) имеет вид:

$$-k \int_0^k d\eta \tilde{\rho}(k - \eta) \tilde{\rho}(\eta) + k^2 \tilde{\rho}(k),$$

поскольку преобразование Фурье переводит $1/x$ в $i\pi\epsilon(k)$, а произведение и свертку меняет местами. Подставляя $\rho(x) = \sum_i \delta(x - x_i)$, получаем

$$2ik \sum_i e^{ikx_i} \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-1}. \quad (7)$$

Такая же подстановка и преобразование Фурье (5) также приводят к (7), если считать функцию $\rho(x)$ четной в соответствии с симметрией Ψ . Используя формулы

$$\Omega^{-1}(x, y; \rho) = -\frac{\epsilon(x - y)}{2} \frac{x}{y} \frac{dz}{\rho(z)}, \quad \int dx \int dy \int dz \frac{\rho(x) \rho(y) \rho(z)}{(x - y)(x - z)} = \frac{\pi^2}{3} \int dx \rho^3(x),$$

в итоге получаем

$$V_{\text{coll}}(\rho) = \int dx U_N(x) \rho(x) + \frac{\pi^2 \hbar^2}{6} \int dx \rho^3(x). \quad (8)$$

Интересно, что (8) совпадает с выражением для V_{coll} в эрмитовой модели /4/. Минимум функционала (8) при условиях $\int dx \rho(x) = N$, $\rho(x) \geq 0$, $\rho(x) = \rho(-x)$ достигается на

$$\rho_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi \hbar} [\lambda - U_N(x)]^{1/2} \theta(\lambda - U_N(x)),$$

где θ — ступенчатая функция, λ — множитель Лагранжа. Лидирующим при $N \rightarrow \infty$ членом в энергии основного состояния служит $V_{\text{coll}}(\rho_0)$. Проверка на точно решаемом случае гармонического потенциала подтверждает правильность этого результата.

В заключение отметим, что, считая в (1) элементы матриц a комплексными числами или кватернионами, а τ — соответствующей инволюцией, получаем модели с калибровочной симметрией $U(N)$ и $Sp(N)$, которые можно рассмотреть таким же способом.

Автор благодарен В.Я. Файнбергу за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. 't Hooft G. Nucl. Phys., B75, 461 (1974).
2. Witten E. In: Recent development in gauge theories (1979 Cargese lectures). New York, Plenum Press, 1980.
3. Brezin E. et al. Comm. Math. Phys., 59, 35 (1978).
4. Jevicki A., Sakita B. Nucl. Phys., B165, 511 (1980).
5. Simonov Yu. A. Preprint ITEP-14, M., 1983.
6. Lovelace C. Nucl. Phys., B190, 45 (1981); B197, 76 (1982).
7. Lott J. Comm. Math. Phys., 95, 289 (1984); 100, 133 (1985).
8. Karim O. A. Phys. Rev., D28, 1036 (1983).
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., Наука, 1974.
10. Andric I., Jevicki A., Levine H. Nucl. Phys., B215, 307 (1985).

Поступила в редакцию 24 ноября 1986 г.