УДК 539.182

МЕДЛЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В КУЛОНОВОМ ПОЛЕ ОТТАЛКИВАНИЯ И ПОТЕНЦИАЛЕ НУЛЕВОГО РАДИУСА: КОЭФФИЦИЕНТ ПРОНИЦАЕМОСТИ БАРЬЕРА

Л. П. Пресняков, А. Н. Старостин[1], Д. Б. Усков

В задаче о рассеянии в кулоновом поле отталкивания и потенциале нулевого радиуса использована точная (в рамках данной модели) волновая функция непрерывного спектра, совпадающая с функцией Грина кулонова поля. С ее помощью по обычным правилам R-матричной теории вычислен коэффициент проницаемости барьера для s-рассеяния. Обсуждаются условия применимости данной модели для конкретных условий различных физических задач.

Со времени работы Ферми [1] потенциалы нулевого радиуса ($\hat{\delta}$-потенциалы) нашли широкое применение в ядерной [2, 3] и атомной [4, 5] физике. Демков и Друкарев показали, что при движении частицы в суммарном потенциале $U(r) = V(r) + \hat{\delta}(\vec{r} - \vec{r}')$ точная волновая функция системы совпадает с функцией Грина уравнения Шредингера с потенциалом $V(r)$, и решили задачу о сдвиге и ширине уровня отрицательного иона в постоянном электрическом поле. После установления Хостлером и Праттом [6, 7] точного вида функции Грина кулонова поля в координатном представлении, круг задач атомной физики, решаемых в замкнутом аналитическом виде, значительно расширился как для потенциалов притяжения (отрицательные + положительно заряженные ионы, гарпунные реакции в системе двух нейтральных атомов) [9, 10], так и для потенциалов отталкивания [11 – 13] (взаимодействие двух отрицательных ионов). При этом достигнуто хорошее количественное описание эксперимента [9 – 13].

[1]РНЦ ТРИНИТИ, г. Троицк Московской обл.

В R-матричной теории ядерных реакций [14] волновые функции за пределами влияния короткодействующего потенциала ядерных сил (функции каналов) часто рассматриваются как невозмущенные кулоновские волновые функции. Во всяком случае, в таком представлении выполнено большинство практически важных расчетов (см. [14] и приведенные там ссылки). Вместе с тем, еще в 1944 г. Ландау и Смородинский (см. [15]) показали, что наличие короткодействующего потенциала вблизи начала координат может существенно влиять на функции каналов.

Целью настоящей работы является исследование этого влияния с помощью метода потенциала нулевого радиуса. Далее будут приведены волновые функции непрерывного спектра в потенциале

$$U(r) = V(r) + \hat{\delta}(\vec{r} - \vec{r}'), \; V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \tag{1}$$

где Z_1, Z_2 – заряды сталкивающихся ядер, логарифмические производные этих функций, и формулы для факторов проницаемости в модели (1). Как и в [14], будем использовать систему единиц $M = \hbar = e^2 = 1$, где M – приведенная масса, $\hbar$ – постоянная Планка, e – заряд электрона. В R-матричной теории факторы проницаемости (P) и сдвига энергии уровня (S) связаны с логарифмической производной функции канала Ψ^+, имеющей в асимптотике $r \to \infty$ только расходящуюся волну, соотношением

$$S + iP = \frac{d}{d\rho} \ln \rho \Psi^+(\rho), \rho = kr, \tag{2}$$

где k – волновое число. Их физический смысл виден из соотношений, имеющих в случае изолированного резонанса вид

$$\Gamma = 2\gamma^2 P, \;\; \Delta = -\gamma^2 S. \tag{3}$$

Здесь Γ и Δ – ширина и сдвиг уровня объединенного ядра с учетом туннельного прохождения кулоновского барьера, а величина γ представляет собой амплитуду приведенной ширины [14], определяемую ядерными силами.

Следуя общей теории [5] и принимая во внимание явный вид функции Грина кулонова поля [6 – 7], для функции Ψ^+ получаем

$$\Psi^+ = G^+(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-i\Gamma(1+iv)}{2\pi k |\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) M_{-iv,1/2}(-iky) W_{-iv,1/2}(-ikx),$$

$$x = r + r' + |\vec{r} - \vec{r}'|, \; y = r + r' - |\vec{r} - \vec{r}'|, \; k = (2E)^{1/2}, \; v = \frac{Z_1 Z_2}{k}. \tag{4}$$

Здесь M и W – функции Уиттекера [16]. Необходимая далее логарифмическая производная функции (4) равна [7 – 11]

$$\frac{d}{d\rho}\ln\Psi^{+} = i2\Gamma(i+iv)\left[M'W' + \left(\frac{1}{4} - \frac{v}{2\rho}\right)MW\right], \tag{5}$$

$$M = M_{-iv,1/2}(-i2\rho), \quad W = W_{-iv,1/2}(-i2\rho), \tag{6}$$

и штрих обозначает дифференцирование по аргументу. Напомним, что функция M пропорциональна регулярной в начале координат кулоновской волновой функции:

$$M_{-iv,1/2}(-i2\rho) = (-i)2A^{-1/2}F_0(v,\rho),\ A = 2\pi v/(e^{2\pi v} - 1), \tag{7}$$

где F_0 – функция с нулевым моментом. Общие методы связи между решениями вырожденного гипергеометрического уравнения [16] дают

$$\Gamma(1+iv)W_{-iv,1/2}(-i2\rho) = A^{1/2}(G_0(v,\rho) + iF_0(v,\rho)). \tag{8}$$

Подставляя (5 – 8) в (2), получаем

$$P = \mathrm{Im}(\rho d/d\rho \ln\Psi^{+}) = \rho(F_0' + (1 - 2v/\rho)F_0^2). \tag{9}$$

Здесь штрих соответствует дифференцированию по ρ, и формула для S легко получается отделением вещественной части в (5) с помощью (7 – 8).

Формулу (9) целесообразно представить в виде

$$P = \frac{2\pi v}{e^{2\pi v} - 1}\rho f(\vartheta,\rho),\ f(v,0) = 1. \tag{10}$$

При использовании невозмущенных кулоновских волновых функций коэффициент проницаемости равен [14]

$$P_{Coulomb} = \frac{\rho}{G_0^2 + F_0^2} = \frac{2\pi v}{e^{2\pi v} - 1}\rho f_{Coulomb}(\vartheta,\rho). \tag{11}$$

Таким образом, при медленных столкновениях, $v = Z_1Z_2/k > 1$, выражения (10) и (11) экспоненциально малы, и их отличие определяется предэкспоненциальным фактором. Отношение

$$P/P_{Coulomb} = K(v,\rho) \tag{12}$$

является величиной, характеризующей влияние потенциала нулевого радиуса в начале координат. В настоящее время существует набор асимптотических и апроксимационных методов представления F_0 и G_0, различных в конкретных областях значений аргумента и параметра. Все они приводят к результату, важному для медленных и сверхмедленных столкновений. При $\rho = kr < 0.1$ и любых значениях параметра v величина

$$K(v, \rho) > 1, \; 0 < \rho < 0.1, \tag{13}$$

и быстро растет с ростом v при фиксированном ρ (методам аналитического представления этой функции для устойчивого численно расчета будет посвящена отдельная публикация).

Напомним, что потенциал нулевого радиуса (1) влияет только на s-рассеяние (орбитальный момент $l = 0$). Параметры столкновений с $l \geq 1$ остаются такими же, как и без этого потенциала, и для них можно использовать невозмущенные кулоновские волновые функции [14]. Однако хорошо известно, что даже в кулоновом поле неупругое s-рассеяние дает доминирующий вклад при медленных и сверхмедленных столкновениях.

Основным физическим выводом данной работы является утверждение, что при низких и сверхнизких энергиях относительного движения наличие потенциала нулевого радиуса в начале координат может существенно увеличить значение фактора проницаемости кулоновского барьера (13) и пропорциональную этому фактору ширину резонансного уровня (3), определяющую величины сечений рассеяния и реакций. При использовании изложенного выше подхода целесообразно вычислять фактор проницаемости (9) для значений $\rho_0 = kr_0$, где r_0 – эффективный радиус объединенного ядра, и затем использовать обычные методы R-матричной теории. С математической точки зрения такой метод является асимптотическим, однако его аналог, развитый для анализа столкновений двух отрицательных ионов [12, 13] с использованием нестационарного уравнения вместо R-матричной теории, позволил количественно предсказывать результаты эксперимента на стадии его технического осуществления.

В заключение отметим, что в настоящее время R-матричная теория активно развивается в физике атомных столкновений [17] и многофотонной ионизации [18]. В этой связи разработка математических методов исследования аналитических свойств волновых функций каналов является актуальной задачей.

Авторы благодарны Ю. Н. Демкову за обсуждение. Работа выполнена при поддержке РФФИ (Л.П.П. и Д.Б.У., грант 99-02-16602; А.Н.С., грант 99-02-18176) и федеральной программы "Интеграции" (проект А0133, "Фундаментальная оптика и спектроскопия").

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fermi E. Nuovo Cim., **11**, 157 (1934).

[2] Breit G. Phys. Rev., **71**, 215 (1947).

[3] Бете Г. А. Физика атомного ядра, ч. II. Гостехиздат, 1948.

[4] Зельдович Я. Б. ФТТ, **1**, 1637 (1959).

[5] Демков Ю. Н., Друкарев Г. Ф. ЖЭТФ, **47**, 918 (1964).

[6] Hostler L. and Pratt R. H. Phys. Rev. Lett., **10**, 469 (1963).

[7] Hostler L. J. Math. Phys., **5**, 591 (1964).

[8] Комаров И. В., Погорелый П. А., Тибилов А. С. Опт. Спектр., **27**, 198 (1969).

[9] Presnyakov L. P. Phys. Rev. A, **2**, 1720 (1970).

[10] Кереселидзе Т. М., Чибисов М. И. ЖЭТФ, **68**, 12 (1975).

[11] Комаров И. В., Соловьев Е. А. Теор. Мат. Физ., **32**, 736 (1966).

[12] Melchert F., Benner M., Kruedener S., et al. J. Phys., **B28**, 3299 (1995).

[13] Усков Д. Б. AIP Conf. Proc., **360**, 687 (1995).

[14] Lane A. M., Thomas R. G. Rev. Mod. Phys., **30**, N 2, 257 (1958) (русский перевод: А. Лейн, Р. Томас. Теория ядерных реакций при низких энергиях, М., ИЛ, 1960).

[15] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, § 133. М., Наука, 1989.

[16] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, М., Наука, 1965.

[17] Atomic and Molecular Processes: an R-matrix Approach, ed. P. G. Burke and K. A. Berrington (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993).

[18] Doerr M. "R-Matrix-Floquett Theory of Multiphoton Processes", in Photon and Electron Collisions with Atoms and Molecules, ed. P. G. Burke and C. J. Joachain (Plenum Press, New York, 1997).

Поступила в редакцию 5 ноября 1999 г.