УДК 533.95

ВОЛНЫ ВАН КАМПЕНА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЕ

А. М. Игнатов

Получены точные решения нестационарного уравнения Власова в виде волн Ван Кампена.

В теории плазмы часто возникает проблема исследования эволюции малых возмущений на фоне изменяющейся функции распределения частиц. Причины, вызывающие изменение фоновой функции распределения, могут быть самыми разными, например, какие-либо нелинейные процессы или нестационарность внешнего ионизатора. В настоящей работе рассматриваются возмущения достаточно высокой частоты, когда можно пренебречь движением ионов и диссипативными процессами. В этих условиях уравнение Власова для электронов записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m}E\frac{\partial F_0(v,t)}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e \int dv f. \tag{1}$$

При этом предполагается, что если полное число электронов в процессе эволюции фоновой функции распределения $F_0(v,t)$ изменяется, то соответствующим образом изменяется компенсирующий ионный фон.

Существует два подхода к решению уравнений (1) с постоянной функцией распределения $F_0(v)$ – это метод Ландау, использующий преобразование Лапласа и метод Ван Кампена [1], который использует разложение по собственным функциям линейного оператора (1). Оба этих метода подробно обсуждаются, например, в [2, 3]. В настоящей работе исследуются аналоги функций Ван Кампена для нестационарного уравнения (1).

Полагая, что фоновая функция распределения $F_0(v,t)$ однородна в пространстве, можно считать все величины зависящими от координат в виде $\exp(ikx)$. Уравнение (1) удобно записать в виде

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} + ikvf(v,t) = \frac{ik}{\pi}\epsilon_2(v,t)n(t), \tag{2}$$

где

$$n(t) = \int dv f(v,t) \tag{3}$$

– возмущение плотности, а

$$\epsilon_2(v,t) = \frac{4\pi^2 e^2}{mk^2} \frac{\partial F_0(v,t)}{\partial v}. \tag{4}$$

В стационарном случае величина $\epsilon_2(v)$ фактически совпадает с мнимой частью продольной диэлектрической проницаемости: $\mathrm{Im}\epsilon(\omega,k) = \epsilon_2(\omega/k)$. Наряду с $\epsilon_2(v,t)$ введем также функцию

$$\epsilon_1(v,t) = 1 - \frac{1}{\pi}\int dv' \frac{\epsilon_2(v,t)}{v'-v}, \tag{5}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Очевидно, что функции $\epsilon^{(\pm)}(v,t) = \epsilon_1(v,t) \mp \epsilon_2(v,t)$ аналитически продолжаются в верхнюю и, соответственно, нижнюю полуплоскости комплексных скоростей и при этом

$$\epsilon^{\sigma}(z,t) = 1 - \frac{1}{\pi}\int dv \frac{\epsilon_2(v,t)}{v-z}, \tag{6}$$

где $\sigma = \mathrm{sign}\,\mathrm{Im}(z)$. В дальнейшем функции голоморфные в верхней или нижней полуплоскости скоростей снабжаются индексом $\sigma = \pm$.

Рассмотрим следующую функцию распределения

$$f(v,t) = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' e^{ikv(t'-t)} n(t')\{\epsilon_1(v,t') + i\,\mathrm{sign}(t-t')\epsilon_2(v,t')\}. \tag{7}$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция распределения (7) удовлетворяет уравнению Власова (2). С другой стороны, из дисперсионного соотношения (5) следует, что

$$\frac{k}{2\pi}\int dv\, e^{ikv\tau}(\epsilon_1(v,t) - i\,\mathrm{sign}(\tau)\epsilon_2(v,t)) = \delta(\tau), \tag{8}$$

поэтому подстановка (7) в (3) приводит к тождеству $n(t) = n(t)$. Таким образом, функция (7) дает точное решение нестационарного уравнения Власова (2), причем соответствующая плотность является произвольной функцией времени.

В частности, можно выбрать $n(t)$ в виде гармонической функции $n(t) = \exp(-ikut)$; соответствующий набор функций (7) будем обозначать как

$$V(v,u,t) = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' e^{ikv(t'-t)-ikut'}\{\epsilon_1(v,t') + i\,\mathrm{sign}(t-t')\epsilon_2(v,t')\}. \tag{9}$$

В стационарной среде, когда $\epsilon_{1,2}$ не зависят от t, интеграл (9) легко вычисляется:

$$V^{(st)}(v,u,t) = e^{-ikut}\left\{\frac{\epsilon_2(v)}{\pi}\frac{P}{v-u} + \epsilon_1(v)\delta(v-u)\right\}, \tag{10}$$

что с точностью до обозначений и множителя e^{-ikut} совпадает с известным решением Ван Кампена. Таким образом, функции $V(v,u,t)$ являются обобщением функций Ван Кампена на нестационарный случай.

Следует отметить, что решения (7, 9) уравнения (2) формально нарушают принцип причинности – функция распределения (7) в момент времени t зависит от $\epsilon_{1,2}$ не только в предыдущие, но и в последующие моменты времени. То же, впрочем, относится и к методу Ван Кампена в стационарном случае и вообще к использованию интегральных преобразований для решения эволюционных уравнений. Применяя, например, преобразование Лапласа или Фурье к линейному эволюционному уравнению с постоянными коэффициентами, необходимо быть уверенным, что в дальнейшем с этими коэффициентами ничего не случится.

Общее решение уравнения (2) можно переписать теперь в виде суперпозиции волн Ван Кампена

$$f(v,t) = \int du\, V(v,u,t)g(u), \tag{11}$$

где $g(u)$ – произвольная функция. Легко видеть, что $g(u)$ и $n(t)$ связаны преобразованием Фурье

$$n(t) = \int du\, e^{-ikut}g(u). \tag{12}$$

Полученные решения означают, что зная весь ход временной эволюции фоновой функции распределения $F_0(v,t)$, можно задать возмущение функции распределения в момент времени $t = 0$ так, чтобы плотность $n(t)$ была заданной функцией времени. Явное выражение для такого начального возмущения задается выражением (7) при $t = 0$.

Рассмотрим теперь начальную задачу для уравнения (2). Для дальнейшего удобно представить функцию распределения $f(v)$ в виде разности $f(v) = f^{(+)}(v) - f^{(-)}(v)$, где функции $f^{(\pm)}(v)$ аналитически продолжаются в верхнюю или нижнюю полуплоскости комплексных скоростей:

$$f^{(\sigma)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv\frac{f(v)}{v-z}, \tag{13}$$

где $\sigma = \operatorname{sign}\operatorname{Im}z$. Разбивая также функцию $g(u)$ на $\pm$ части и используя (11), легко убедиться, что

$$f^{(+)}(z,t) = \int du\, V^{(+)}(z,u,t) g^{(+)}(u), \tag{14}$$

где

$$V^{(+)}(z,u,t) = \frac{k}{2\pi} \int_0^\infty dt' e^{-ikut+ik(z-u)t'} \epsilon^{(+)}(z,t+t'), \tag{15}$$

и $\epsilon^{(+)}(z,t)$ определяется выражением (6). Аналогичные выражения можно написать и для (–) частей, но в дальнейшем они не понадобятся.

Пусть в момент времени $t = 0$ начальное условие для уравнения (2) имеет вид $f = f_0(v) = f_0^{(+)}(v) - f_0^{(-)}(v)$. Зная зависимость $n(t)$ при $t > 0$, простым интегрированием уравнения (2) легко получить функцию $f(v,t)$. В свою очередь, плотность при $t > 0$ в соответствии с (12) определяется функцией $g^{(+)}(u)$. Таким образом, начальная задача сводится к решению интегрального уравнения (14) при $t = 0$:

$$f_0^{(+)}(z) = \int du\, V^{(+)}(z,u,0) g^{(+)}(u). \tag{16}$$

В частности, в стационарной среде $V^{(+)}(z,u,0) = 1/2\pi\, \epsilon^{(+)}(z)/(z-u)$ и уравнение (16) сводится к алгебраическому $f_0^{(+)}(z) = \epsilon^{(+)}(z) g^{(+)}(z)$. В общем же виде решить уравнение (16), по-видимому, невозможно. Тем не менее, некоторую информацию о характере решеений получить удается.

Поскольку в силу (12) $g^{(+)}(u) = k/2\pi \int_0^\infty dt \exp(ikut) n(t)$, совершая одностороннее образование Фурье, можно переписать уравнение (16) в виде

$$\tilde{f}_0(t) = \int_0^t dt'\, R(t-t',t') n(t'), \tag{17}$$

где $\tilde{f}_0(t) = \int dz \exp(-ikzt) f_0^{(+)}(z)$ и

$$R(t,t') = \frac{k}{2\pi} \int dz e^{-ikzt} \epsilon^{(+)}(z,t'). \tag{18}$$

В стационарной среде асимптотика $n(t)$ определяется особенностями $\epsilon^{(+)}(z)$ вблизи действительной оси. Можно предположить поэтому, что и в случае медленно изменяющейся функции $F_0(v,t)$ можно ограничиться учетом ближайших к действительной оси полюсов и нулей $\epsilon^{(+)}(z,t)$, т.е. аппроксимируем $\epsilon^{(+)}(z,t)$ как

$$\epsilon^{(+)}(z,t) = 1 - \frac{\omega_p^2(t)}{k^2(z-z_0)^2}. \tag{19}$$

Это выражение является точным для рациональной функции распределения $F_0(v,t) = w/\pi n_0(t)/(v^2 + w^2)$ (при этом $z_0 = -iw$). Предположим далее, что временная зависимость $F_0(v,t)$ приводит лишь к изменению плотности $n_0(t)$, тогда как положение полюса z_0 в (19) от времени не зависит. Двукратным дифференцированием уравнение (17) можно привести теперь к простому виду

$$\frac{d^2n_1(t)}{dt^2} + \omega_p^2(t)n_1(t) = \frac{d^2f_1(t)}{dt^2}, \tag{20}$$

где $n_1(t) = \exp(ikz_0t)n(t)$ и $f_1(t) = \exp(ikz_0t)f_0(t)$.

Решение однородного уравнения (20), отвечающее свободным ленгмюровским колебаниям, легко получить методом ВКБ

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_p(t)}}\exp\left\{-i\int dt\omega_p(t) - ikz_0t\right\}. \tag{21}$$

Это выражение демонстрирует существенное отличие ленгмюровских колебаний от обычных затухающих осцилляций. В последнем случае можно было бы ожидать в предэкспоненциальном множителе (21) появления модуля ленгмюровского значения частоты $\omega(t)$. Отмечу, что поскольку никаких предположений о малости $|z_0|$ не делалось, это отличие может быть существенным.

В заключение следует признать, что вопрос о полноте полученного набора функций Ван Кампена остается открытым. Фактически эта проблема сводится к исследованию условий обратимости интегрального оператора (16) и каких-либо общих критериев, аналогичных критерию Пенроуза [2], мне получить не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Van Kampen N. G. Physica (Utrecht)., **21**, 949 (1955); ibidem, **23**, 647 (1957).

[2] Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы. М., Мир, 1974.

[3] Балеску Р. Статистическая механика заряженных частиц. М., Мир, 1967.

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 18 октября 1999 г.