Краткие сообщения по физике № 2-1985 г.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СУПЕРАЛГЕБРОЙ SU (m/n)

В.А. Андреев

УДК 517.946.4

В работе построены L-A пары для суперсимметричных уравнений, связанных с супералгеброй SU(m/n).

Интегрируемые системы связаны с алгебрами Ли, которые возникают при замыкании алгебры псевдопотенциалов соответствующих уравнений /1/. Каждой полупростой алгебре Ли отвечает некоторая интегрируемая релятивистски инвариантная система уравнений /2,3/. В настоящее время большое внимание привлекают к себе суперсимметричные интегрируемые уравнения /4-8/. Их L-A пары строятся уже с помощью супералгебр Ли. В настоящей работе перечислены релятивистски инвариантные суперсимметричные интегрируемые уравнения, связанные с супералгеброй SU (m/n) .

Исходной моделью служит суперсимметричное уравнение Лиувилля /4,5/. Рассмотрим две линейные системы уравнений:

$$D_1 \Psi = (- D_1 \sum_{a} f_a K_a + \lambda \sum_{a} e^{\varphi_a} E_a) \Psi, \tag{1}$$

$$D_2 \Psi = (D_2 \sum_{a} f_a K_a + \frac{1}{\lambda} \sum_{a} e^{\varphi_a} E_{-a}) \Psi. \tag{2}$$

Из условия $D_1 D_2 \Psi + D_2 D_1 \Psi = 0$ получаем

$$2D_1 D_2 f_a + c_a e^{2\varphi_a} = 0, \quad a = 1, \ \ldots, \ n, \tag{3}$$

$$\varphi_a + \sum_{\beta} c_{a\beta} f_\beta = 0, \tag{4}$$

где

$$\left\{ E_a, E_{-\beta} \right\} = \delta_{a\beta} c_a K_a, \tag{5}$$

$$[K_\alpha, E_\beta] = c_{\alpha\beta}E_\beta\,, \quad [K_\alpha, K_\beta] = 0. \tag{6}$$

Таким образом, для того, чтобы построить L-A пару для системы (3), необходимо найти какое-либо представление для супералгебры (5), (6).

Укажем для алгебры $SU(m/n)$ максимальный набор элементов, удовлетворяющих соотношениям (5), (6). Рассмотрим случай, когда $m = n$, т.е. алгебру $SU(n/n)$. Имеем n бозонных полей a_i $(i = 1, \ldots, n)$ и n фермионных полей a_i $(i = n + 1, \ldots, 2n)$. Алгебру $SU(n/n)$ образуют операторы $A_{ij} = a_i^+a_j$.

Введем функцию $\Theta(i) = 1$, если $i = 1, \ldots, n$; $\Theta(i) = 0$, если $i = n + 1, \ldots, 2n$; $\Theta(ik) = \Theta(i) + \Theta(k)$. Коммутационные соотношения имеют вид:

$$[A_{ii}, A_{ij}] = A_{ij}, \quad [A_{ii}, A_{ji}] = -A_{ji},$$

$$[A_{ik}, A_{lm}] = \delta_{kl}A_{im} - (-1)^{\Theta(ik)\Theta(lm)}\delta_{im}A_{lk}.$$

Операторы A_{ii} образуют картановскую подалгебру, а A_{ik} соответствуют корневым векторам. Операторы A_{ij}, для которых $\Theta(ij) = 1$, являются нечетными. Необходимо выбрать те из них, которые удовлетворяют соотношениям (5). Видно, что один из возможных наборов образуют операторы $A_{1,n+1}, A_{2,n+2}, \ldots, A_{n,2n}, A_{n+1,n}, A_{n+2,1}, A_{n+3,2}, \ldots, A_{2n,n-1}$; сопряженный к нему набор: $A_{n+1,1}, A_{n+2,2}, \ldots, A_{2n,n}, A_{n,n+1}, A_{1,n+2}, A_{2,n+3}, \ldots, A_{n-1,2n}$.

Взяв их в качестве операторов (E_α) и $(E_{-\alpha})$ и дополнив их операторами $(K_\alpha) = (A_{11}, \ldots, A_{2n,2n})$, с помощью соотношения (6) можно вычислить матрицу $C = \|c_{\alpha\beta}\|$ и найти явный вид уравнения (3), обладающего L-A парой (1), (2).

Рассмотрим вопрос о матричной реализации операторов A_{ij}. Выпишем базис Картана – Вейля алгебры $SU(n/n)$ /9, 10/:

$$[E_i^+, E_j^-] = \delta_{ij}K_i\,, \quad i, j = 1, \ldots, n-1, n+1, \ldots, 2n-1;$$

$$\{E_n^+, E_n^-\} = K_n, \quad [E_n^+, E_i^-] = [E_n^-, E_i^+] = 0, \quad i \neq n;$$

$$[K_i, E_j^\pm] = \pm c_{ij}E_j^\pm.$$

Матрица Картана алгебры $SU(n/n)$ отличается от $SU(2n)$ тем, что $c_{n,n} = 0$ и $c_{n,n+1} = 1$, остальные элементы совпадают.

С помощью матрицы Картана легко найти явный вид базиса Картана – Вейля

$$K_i = e_{i,i} - e_{i+1,i+1},\quad i = 1, ..., n-1, n+1, ..., 2n-1,$$

$$K_n = e_{n,n} + e_{n+1,n+1},\quad E_i^+ = e_{i,i+1},\quad E_i^- = e_{i+1,i}.$$

Здесь e_{ij} — матрицы $2n \times 2n$, у которых все элементы, кроме одного, равны нулю, а элемент, стоящий на пересечении i-й строки с j-ым столбцом, равен единице.

Операторы $E_n^{\pm}$ — нечетные, остальные четные. Другие нечетные операторы получают с помощью соотношений

$$[b_l^{k\,\pm}, E_i^+] = \delta_{ik} b_l^{k+1\,\pm},\quad i = 1, ..., n,$$

$$[b_l^{k\,\pm}, E_i^+] = -\delta_{il} b_{l-1}^{k\,\pm},\ i = n+1, ..., 2n,$$

$$b_n^{n\,\pm} = E_n^{\pm}.$$

Они обладают свойством $\left\{ b_l^{k\,+}, b_{l'}^{k'\,-} \right\} = 0$, если $k \neq k'$, $l \neq l'$.

В качестве примера рассмотрим алгебру $SU(2/2)$: $b_2^{1\,+} = e_{1,3}$, $b_3^{2\,+} = e_{2,4}$, $b_3^{1\,+} = e_{1,4}$, $b_2^{1\,-} = e_{3,1}$, $b_3^{2\,-} = e_{4,2}$, $b_3^{1\,-} = e_{4,1}$.

Сопряженные наборы образуют операторы $(b_2^{2\,+}, b_3^{1\,+}, b_2^{1\,-}, b_3^{2\,-}) = (B_i^+)$, $(b_2^{2\,-}, b_3^{1\,-}, b_2^{1\,+}, b_3^{2\,+}) = (B_i^-)$. При этом L-A пара (1), (2) имеет вид:

$$D_1 \Psi = \left(-D_1 \sum_{i=1}^{4} e_{ii} f_i + \lambda \sum_{i=1}^{4} e^{\varphi_i} B_i^+ \right) \Psi,$$

$$D_2 \Psi = \left(D_2 \sum_{i=1}^{4} e_{ii} f_i + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{4} e^{\varphi_i} B_i^- \right) \Psi.$$

Она является условием совместности системы уравнений

$$D_1 D_2 f_1 + \exp(f_4 - f_1) + \exp(f_1 - f_2) = 0,$$

$$D_1 D_2 f_2 + \exp(f_2 - f_3) + \exp(f_1 - f_2) = 0,$$

$$D_1 D_2 f_3 + \exp(f_3 - f_4) + \exp(f_2 - f_3) = 0,$$

$$D_1 D_2 f_4 + \exp(f_4 - f_1) + \exp(f_3 - f_4) = 0.$$

Другую систему уравнений можно получить, выбрав наборы из трех операторов $(\widetilde{B}^{\pm}_{i}) = (b_2^{2\,\pm}, b_2^{1\,\mp}, b_3^{2\,\pm})$.
Ей отвечает система уравнений

$$D_1 D_2 u_1 + \exp(u_3 - u_2) = 0,$$

$$D_1 D_2 u_2 + \exp(u_2 - u_1 - u_3) + \exp(u_3 - u_2) + \exp(u_3 - u_1 - u_2) = 0,$$

$$D_1 D_2 u_3 - \exp(-u_1 - u_2 + u_3) = 0.$$

Автор благодарен В.П. Карасеву и В.Н. Толстому за консультации по теории супералгебр.

Поступила в редакцию 12 ноября 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. А. ТМФ, 36, 335 (1978).
2. Михайлов А. В. Письма в ЖЭТФ, 30, 443 (1979).
3. Mikhailov A. V., Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Comm. Math. Phys., 79, 473 (1981).
4. Chaichian M., Kulish P. P. Phys. Lett., 78B, 413 (1978).
5. Morris W. Phys. Lett., 79B, 23 (1979).
6. Лезнов А. Н., Хрущев В. В. В сб. "Теоретико-групповые методы в физике". М., Наука, 1983, т. 1, с. 228.
7. d' Hooker E. Phys. Rev., A18, 1724 (1981).
8. Голод П. И. Препринт ИТФ-79-46Р, Киев, 1979.
9. Kac V. Adv. Math., 26, 8 (1979).
10. Hurni J. P., Morel B. J. Math. Phys., 24, 146 (1983).