УДК 535.37

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИИ И КОНЦЕНТРАЦИИ ДЕФЕКТОВ

Ф. Мирзоев, Л. А. Шелепин

Исследованы нелинейные периодические бегущие волны деформации и концентрации точечных дефектов в пластинах, находящихся под воздействием внешних потоков энергии. Получено уравнение изменения амплитуды нелинейных волн, и на его основе рассмотрены особенности затухания солитонных решений.

При рассмотрении эволюции нелинейных упругих волн в кристалле весьма важным является учет структурных неоднородностей (имеющихся в среде или генерирующихся в процессе внешних воздействий), создающих заметную деформацию среды. На динамику волн заметное влияние также оказывает дисперсия, обусловленная конечностью толщины кристалла. Дисперсия, связанная с конечностью периода кристаллической решетки [1], может сказываться на достаточно высоких частотах, где длина свободного пробега фонона меньше длины волны.

В работе исследуется распространение нелинейной продольной упругой волны в кристалле в виде пластины, в котором под воздействием внешнего потока энергии (лазерное излучение, потоки частиц) создаются точечные дефекты (вакансии, межузлия) с концентрацией $n_j(x,t)$ ($j = v$ – для вакансий, $j = i$ – для межузлий). При прохождении продольной волны в областях растяжения и сжатия изменяется энергия активация образования дефектов, что приводит к их пространственному перераспределению [2]. Дефекты мигрируют по кристаллу, рекомбинируют на различного рода центрах (ρ_s – плотность центров), роль которых могут играть дислокации, примеси внедрения и т.д. Считается, что длина распространяющихся волн (λ) больше толщины пластины (h).

В рамках перечисленных допущений нелинейное динамическое уравнение, описывающее распространение упругих волн в пластине с квадратичной нелинейностью среды с учетом генерации дефектов, описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta_N}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - l^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = -\frac{K\Omega_j}{\rho} \frac{\partial n_j}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь $u(x,t)$ – смещение среды, $c_s = (E/\rho(1-\sigma^2))^{1/2}$ и $c_\tau = (\mu/\rho(1-\sigma^2))^{1/2}$ – скорости продольной и поперечной волн в кристалле, ρ – плотность среды, β_N – коэффициент нелинейности и l – параметр дисперсии [3]:

$$\beta_N = \frac{3E}{\rho(1-\sigma^2)} + 3B\left[\frac{1-4\sigma+6\sigma^2}{(1-\sigma)^3}\right] + A\left[1 - \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^3\right] + C\left(\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\right)^3; \; l^2 = \frac{h^2\sigma^2}{12(1-\sigma)^2}.$$

(A, B, C – модули Ландау третьего порядка; E, σ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона); K – модуль всестороннего сжатия; Ω_j – дилатационный параметр, характеризующий изменение объема кристалла при образовании в нем одного точечного дефекта ($\Omega_j < 0$ для $j = v$, $\Omega_j > 0$ для $j = i$). Для большинства твердых тел (металлов, многих полимеров) $\beta_N < 0$.

Уравнение (1), является обобщением известного уравнения теории упругости на случай наличия в системе концентрационных напряжений, которые аналогичны термонапряжениям [4].

Правая часть уравнения (1) определяется распределением дефектов в среде, зависящим, в свою очередь, от деформаций и напряжений. Поэтому для полного описания распространения упругой волны необходимо уравнение (1) замкнуть уравнением для плотности дефектов. Если принять, что основными процессами, контролирующими поведение во времени дефектов являются процессы генерации, рекомбинации и диффузии, для плотности n_j можно записать следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_0 + q_\epsilon u_x + D\frac{\partial^2 n_j}{\partial x^2} - \beta n_j, \quad (2)$$

где q_0 – темп генерации точечных дефектов в отсутствие деформации, второе слагаемое в правой части (2) – деформационная добавка в генерацию ($\epsilon = u_x$ – деформация среды); D – коэффициент диффузии; β – скорость рекомбинации на стоках. Объемная взаимная рекомбинация разноименных дефектов не учитывается.

Система уравнений (1) и (2) замкнута. Она полностью описывает взаимообусловленные изменения плотности дефектов и смещение среды: неоднородное распределение дефектов влияет на смещения среды, которые, в свою очередь, воздействуют на распределение дефектов согласно (2).

В случае, когда рекомбинационно-генерационные процессы существенно преобладают над диффузией дефектов, система уравнений (1) и (2) сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta_N}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} - l^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - c_\tau^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\right] = \frac{K\Omega_j}{\rho}q_\epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} -$$

$$-\beta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta_N}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} - l^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - c_\tau^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\right]. \quad (3)$$

Уравнение (3) является дифференциальным аналогом уравнений, характерных для диссипативных сред с деформационной памятью (или с релаксацией). Учитывая, что в нулевом приближении $u_{tt} \approx c_s^2 u_{xx}$, из (3) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta_N}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} - l^2(c_s^2 - c_\tau^2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{K\Omega_j}{\rho c_s^2}q_\epsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\beta l^2}{c_s^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (4)$$

Для длинноволновых возмущений ($\lambda/h > 1$), следуя работе [5], вводим волновые переменные ϵ_1 и ϵ_2

$$u_x = \epsilon_1 + \epsilon_2,\ u_t = c_s(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \frac{l^2 c_s}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\epsilon_1 - \epsilon_2). \quad (5)$$

В результате уравнение (4) сводится к системе уравнений связанных нормальных волн

$$\frac{\partial \epsilon_{1,2}}{\partial t} \mp c_s\frac{\partial \epsilon_{1,2}}{\partial x} \mp \beta_d\frac{\partial^3 \epsilon_{1,2}}{\partial x^3} \mp \beta_N\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 = \pm g(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \zeta\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad (6)$$

где $g = q_\epsilon K\Omega_j/\rho c_s^2$, $\zeta = \beta l^2/c_s$ – коэффициенты соответственно низкочастотных и высокочастотных потерь, $\beta_d = l^2(c_s^2 - c_\tau^2)/2$ – коэффициент дисперсии.

Как видно из уравнений (6), функции ϵ_1 и ϵ_2 представляют собой бегущие навстречу друг другу волны деформации, взаимодействующие за счет нелинейности и диссипации.

Рассмотрим эволюцию одной волны деформации $\epsilon_2 = \epsilon(x,t)$, распространяющейся слева направо вдоль оси x. Запишем уравнение изменения энергии, которое имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^\lambda \epsilon^2 dx\right) = -2g\int_0^\lambda \epsilon^2 dx - 2\zeta\int_0^\lambda \epsilon_x^2 dx. \quad (7)$$

Здесь $E = \int_0^\lambda \epsilon^2 dx$ – энергия волны.

Ввиду малости эффектов диссипации, ограничимся рассмотрением нелинейных квазистационарных волн, описываемых решением уравнения (6) без учета взаимодействия полей деформации и дефектов ($g = \zeta = 0$). При этом система (6) сводится к уравнению

Кортевега – де Вриза, которое допускает решения в виде бегущих стационарных периодических (кноидальных) волн или уединенных волн (солитонов) [5]. Стационарные периодические волны деформации, зависящие от одной бегущей переменной $z = x - Vt$, имеют вид [5]

$$\epsilon(z) = -\frac{2a}{m^2}\left(1 - \frac{E(m)}{K(m)}\right) + 2asn^2[k_m z, m]. \tag{8}$$

Здесь a – амплитуда, $s = m^2$ – коэффициент нелинейных искажений ($0 < s < 1$), V – скорость волны, $K(m)$ и $E(m)$ – соответственно полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $k_m = (-\beta_N a/3\beta_d m^2)^{1/2} \equiv k_0 a^{1/2}$ – аналог волнового числа для нелинейной периодической волны. Связь между амплитудой a, коэффициентом m и периодом волны определяется соотношением $\lambda = \sqrt{\frac{3\beta_d}{-\beta_N}} mK(m)a^{-1/2}$.

Выражение (8) описывает два различных класса волн: нелинейные квазигармонические волны при малых амплитудах и квазисолитоны при больших амплитудах.

Подставляя в (7) решение (8), получаем

$$(3g_1 a^{1/2} + 4g_2 a)\frac{da}{dt} + 4g(g_1 a^{3/2} + g_2 a^2) + 4\zeta g_3 a^{5/2} = 0, \tag{9}$$

где

$$g_1 = \frac{4}{k_0}\int_0^{\lambda k_m}\left[-\frac{2(K-E)}{\zeta^2 K}sn^2(y,m) + sn^4(y,m)\right]dy,$$

$$g_2 = \frac{4\lambda}{m^4}\left(1 - \left(\frac{E(m)}{K(m)}\right)^2\right), \quad g_3 = \frac{16}{k_0}\int_0^{\lambda k_m} sn^2(y,m)cn^2(y,m)dy.$$

При больших амплитудах (для солитонных волн) уравнение изменения амплитуды принимает вид

$$\frac{3}{2}\frac{da}{dt} = -2ga + 7\frac{\beta_N\zeta}{\beta_d}a^2. \tag{10}$$

Для значений деформаций ($u_x \leq 10^{-4}$) высокочастотные потери малы, что позволяет пренебречь вторым слагаемым в правой части (10). Тогда для амплитуды солитона получаем экспоненциальное затухание $a = a_0\exp(-\gamma t)$ с константой затухания $\gamma = 4g/3$. В общем случае из (10) имеем более сложный закон изменения амплитуды $a(t) = a(0)\left[e^{\frac{4}{3}gt} - \frac{8\zeta\beta_N}{3\beta_d g}a(0)\left(e^{\frac{4}{3}gt} - 1\right)\right]^{-1}$. Анализируя эти формулы, заметим, что низкочастотные (g) и высокочастотные (ζ) потери приводят к различным законам изменения амплитуды солитонных волн.

В другом предельном случае $a \to 0$, из уравнения (10) также имеем экспоненциальное затухание для амплитуды волны, но с другим декрементом затухания $\gamma = g$.

Таким образом, получено уравнение, описывающее распространение нелинейных волн в упругой среде с учетом генерации дефектов под воздействием внешних потоков энергии. Оно представляет собой обобщение известного уравнения Кортевега де Вриза – Бюргерса [6]. Приведены уравнения для изменения амплитуды нелинейных волн и декременты затухания солитонных волн.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Косевич А. М. Основы механики кристаллической решетки. М., Наука, 1972.
[2] Мирзоев Ф., Панченко В. Я., Шелепин Л. А. УФН, **166**, N 1, 3 (1996).
[3] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М., Наука, 1980.
[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., Наука, 1965, 204 с.
[5] Потапов А. И. Нелинейные волны деформаций в стержнях и пластинах. Горький, 1985, 107с.
[6] Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах. Киев, Наукова Думка, 1988, 303 с.

Поступила в редакцию 16 ноября 1999 г.