Краткие сообщения по физике № 1-1986 г.

УДК 530.145

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ГРИБОВА С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М.Ю. Логачев

Найдены решения уравнения, описывающего неоднозначность Грибова для $F_{\mu\nu} = 0$, для случаев калибровочной группы $G = SU(2), SU(3), SO(4)$ и размерности пространства $n = 2$ и 4.

Одной из специфических особенностей неабелевой калибровочной теории поля является неоднозначность Грибова /1/: орбита действия группы калибровочных преобразований может многократно пересекать поверхность, заданную условием калибровки $\partial_\mu A_\mu = 0$. Основная трудность при рассмотрении грибовских неоднозначностей состоит в том, что не удается найти все точки пересечения для каждой орбиты. Цель данной работы – найти в явном виде полевые конфигурации, калибровочно эквивалентные $A_\mu = 0$ $(A_\mu = g^{-1}\partial_\mu g)$ и удовлетворяющие условию $\partial_\mu A_\mu = 0$. Для этого достаточно решить уравнение

$$\partial_\mu (g^{-1}\partial_\mu g) = 0, \quad g(x_\mu) \in G. \tag{1}$$

Легко проверить, что /1/ есть уравнение Эйлера – Лагранжа для функционала

$$S(g) = \int Sp(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\mu g)\, dx^n, \tag{2}$$

где $Sp(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\mu g)$ – инвариантный метрический тензор для группы G; выражение (2) – функционал Дирихле отображения g: $R^n \to G$, который в общем случае отображения римановых пространств $f{:}M \to N$ определяется как $D(f) = \int\limits_M g^{ij}\hat{g}_{\alpha\beta}(\partial f^\alpha/\partial x^i)(\partial f^\beta/\partial x^j)\sqrt{\det g_{ij}}\, dx^n$, где $x \in M$, g^{ij}, $\hat{g}_{\alpha\beta}$ – метрические тензоры на M и N.

Подробный обзор теории гармонических отображений дан в /2, 3/. В данной работе найдены гармоническое отображение $R^4 \to SU(3)$ и функциональные семейства гармонических отображений $R^n \to G$ для $G = SU(2)$, $SO(4)$ и $n = 2$ и 4.

Рассмотрим гармонические отображения в группы $SU(2)$, $SO(4)$. Известно, что $SU(2)$ метрически изоморфна сфере $S_3 \subset R^4$; матрицы $SU(2)$ – это матрицы вида

$$\begin{pmatrix} z + it & y + ix \\ -y + ix & z - it \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$; $S_3 \supset S_2 = \{(x, y, z, 0) \in S_3 \subset R^4\}$: S_2 – вполне геодезическое подмногообразие S_3, то есть S_2 содержит все касательные к себе геодезические S_3. Следовательно, гармоническое отображение в S_2 есть гармоническое отображение в S_3. Общее доказательство того, что композиция гармонического отображения и вполне геодезического вложения есть гармоническое отображение дано в /2/.

Будем искать отображение $R^2 \to S_2$ в виде $\tilde{\varphi}(r, \varphi) = \varphi$, $\Theta(r, \varphi) = \Theta(r)$, где $\Theta, \tilde{\varphi}$ – сферические координаты в S_2, а r, φ – полярные координаты. Функционал Дирихле для отображений такого вида $S(\Theta(r)) = 2\pi\int\limits_0^\infty r(\Theta'^2 + \sin^2\Theta/r^2)\, dr$, уравнение Эйлера – Лагранжа

$$\Theta'' + \Theta'/r - \sin 2\Theta/2r^2 = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) с учетом начального условия $\Theta(0) = 0$ есть

$$\Theta(r) = 2 \operatorname{arctg} \alpha r, \quad \alpha \in R, \tag{5}$$

или, в декартовых координатах с учетом вложения (3) при $\alpha = 1$,

$$g(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 1 - x^2 - y^2 & 2(y + ix) \\ -2(y - ix) & 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Рассмотрим аналитическое отображение $f(x + iy) = u + iv$. Из условий Коши – Римана $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y$ следует $\partial_x(g^{-1}\partial_x g) + \partial y(g^{-1}\partial_y g) = ((\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2)(\partial_u(g^{-1}\partial_u g) + \partial_v(g^{-1}\partial_v g))$. Таким образом, композиция голоморфного ($R^2 = \mathbb{C} \to C = R^2$) и гармонического отображений является гармоническим отображением. Функциональное семейство гармонических отображений имеет вид (6):

$$\widetilde{g}(x, y) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \begin{pmatrix} 1 - u^2 - v^2 & 2u + 2iv \\ -2u + 2iv & 1 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ может быть мероморфной функцией, если положить $\widetilde{g}(x_p, y_p) = -E$, где $x_p + iy_p = z_p$ – полюс $f(z)$. Можно показать, что в этом случае уравнение (1) удовлетворено всюду на R^2. Легко показать также, что композиция отображений $R^4 = \mathbb{C}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{\widetilde{q}} SU(2)$, где $f(z_1 z_2) = u + iv$ – мероморфная функция, а $\widetilde{g}$ задано формулой (7), удовлетворяет уравнению (1) и, следовательно, является гармоническим отображением.

Пусть $U_1, U_2 \in SU(2)$. Определим преобразование $h(U_1, U_2)$: h действует на четырехмерном пространстве матриц вида $A = rX$, $X \in SU(2)$, $r \in R$, со скалярным произведением $(A; B) = (\det(A + B) - \det A - \det B)/2$; $h(A) = U_1 A U_2^{-1}$. Можно показать, что $h \in SO(4)$ и $h(x_\mu) = h(U_1(x_\mu), U_2(x_\mu))$ удовлетворяет уравнению (1), если $U_1(x_\mu)$ и $U_2(x_\mu)$ удовлетворяют ему.

Таким образом, мы получили функциональные семейства решений уравнения (1) для $g: R^n \to G$ в случаях $n = 2$ и 4 и $G = SU(2)$, $G = SO(4)$.

Гармоническое отображение $g: R^4 \to SU(3)$ будем искать в виде $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \exp i\Theta(r) x_\mu \eta_\mu / r$, где η_μ принадлежат алгебре Ли $SU(3)$, $Sp\eta_\nu\eta_\mu = \delta_{\nu\mu}$, $r = \sqrt{\Sigma x_\mu^2}$. Потребуем кроме того, чтобы образ отображения был вполне геодезическим подмногообразием $SU(3)$. В этом случае, как было указано выше, достаточно, чтобы g было гармоническим отображением R^4 на образ $\mathrm{Im} g \subset SU(3)$.

Подмногообразие exp B является вполне геодезическим в группе G только тогда, когда B – тройная система в алгебре Ли группы G, т.е. линейное подпространство такое, что для всех $x, y, z \in B$ выражение $[x[yz]]$ также принадлежит B (см. /3/, § 16; /4/). Рассмотрим две тройные системы размерности 4 из $SU(3)$: подпространство m, порожденное матрицами Гелл-Манна

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

и m' – ортогональное дополнение к m. m' – подалгебра, $\exp m'$ – подгруппа $SU(3)$, $\exp m' \sim SU(2) \times U(1)$. Можно показать, что а) m и $M = \exp m$ инвариантны относительно сопряжения с элементами подгруппы $M' = \exp m'$: для любых $x \in m$, $h \in M'$, $h(x) = hxh^{-1} \in m$; б) функция вида

$$g(x_\mu) = \exp i f(r)(x_1\lambda_4 + x_2\lambda_5 + x_3\lambda_6 + x_4\lambda_7) \tag{8}$$

обладает свойствами симметрии: $\bar{g}(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(-x_1, x_2, -x_3, x_4)$, и для любого $h \in M'$ найдется $\widetilde{h} \in SO(4)$, такое, что $hg(x_\mu)h^{-1} = g(\widetilde{h}(x_\mu))$.

Из (6) следует, что $i\partial_\mu(g^{-1}(x_\mu)\partial_\mu g\overline{(x_\mu)}) = a(r)(x_1\lambda_4 + x_2\lambda_5 + x_3\lambda_6 + x_4\lambda_7)$, $a(r) \in R$, поэтому решение уравнения (1) можно искать как экстремум функционала Дирихле для функций вида (8):

$$S(\Theta(r)) = \int_0^\infty (\Theta'^2 + \sin^2\Theta/r^2 + 4(1-\cos\Theta)/r^2)\, 2\pi^2 r^3\, dr.$$

Уравнение Лагранжа – Эйлера имеет вид:

$$\Theta'' + 3\Theta'/r - 2\sin\Theta/r^2 - \sin 2\Theta/2r^2 = 0. \tag{9}$$

Легко проверить, что (5) есть решение (9), с начальными условиями $\Theta(0) = 0$, $\Theta'(0) = 2a$. Учитывая, что для матриц Гелл-Манна $\lambda_i^3 = \lambda_i$, получим явную форму решения уравнения (1) $(a = 1)$:

$$g(x_\mu) = \frac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix} 1 + x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 & -2(x_1x_3 + x_2x_4 - i(x_2x_3 - x_1x_4)) & 2(x_2 + ix_1) \\ -2(x_1x_3 + x_2x_4 + i(x_2x_3 - x_1x_4)) & 1 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 & 2(x_4 + ix_3) \\ 2(-x_2 + ix_1) & 2(-x_4 + ix_3) & 1 - r^2 \end{pmatrix}$$

Автор благодарен В.Я. Файнбергу за помощь и постоянный интерес к работе и М.А. Соловьеву за многочисленные полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gribov V.N. Nucl. Phys. **B139**, № 1–2,1 (1978); Singer I.M. Comm. Math. Phys., **60**, 7 (1978); Соловьев М.А. Письма в ЖЭТФ, **38**, в. 8, 415 (1983).
2. Eells J., Lemaire L. Bull. London Math. Soc. **10**, № 1, 1 (1978).
3. Фоменко А.Т. Вариационные методы в топологии. М., Наука, 1982.
4. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М., ИЛ, 1949.

Поступила в редакцию 15 октября 1985 г.