УДК 530.1; 519.6

О ДИНАМИКЕ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

А. С. Харитонов, Л. А. Шелепин

Анализируется динамика процессов с памятью. Рассмотрены распределения по времени, следующие из линейных немарковских уравнений, и указана их связь с дисконтированием в экономике. Обсуждаются возможности немарковского описания нелинейных процессов.

Как известно, теория марковских процессов составляет фундамент современной физики, как классической статистической, так и квантовой. Для марковских процессов знание состояния системы в какой-либо момент времени t_0 позволяет в принципе определить вероятностную картину поведения в будущем; добавочные сведения о событиях при $t < t_0$ не могут изменить эту картину. Марковские процессы описывают движение частиц в локальном пространстве-времени. Для немарковских процессов или процессов с памятью, картина будущего существенно зависит от событий при $t < t_0$, и они описывают структуры и нелокальные объекты. Их непосредственная область приложений – биологические, экономические и социальные явления.

В работах [1 – 3] анализировались равновесные распределения, возникающие в теории немарковских процессов. Были рассмотрены три типа распределений: структурные (распределения по негэнтропии), рекуррентные, эмпирические (гиперболические распределения). Распределения первого типа по форме аналогичны больцмановскому, где вместо энергии E стоит негэнтропия S

$$W = W_0 \exp(-S/\Theta). \tag{1}$$

Здесь W – конкретная исследуемая величина, параметр Θ – аналог температуры, характеризующий систему в целом и соответствующий некоторому усредненному показателю сложности структуры отдельного объекта. Распределения второго типа исходят из рекуррентных формул, типа простейшей формулы для чисел Фибоначчи

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \tag{2}$$

учитывающих роль прошлого для некоторой величины u. Показано, что в этом случае возникают распределения типа (1) с определенным Θ, играющим роль эталонного. По распределениям третьего типа – гиперболическим

$$n(x) = Ax^{-\alpha}, \tag{3}$$

где A, α – параметры, $\alpha > 0$, накоплен большой статистический материал для широкого круга явлений [4]. Показано [3], что определенными преобразованиями переменных это уравнение приводится к (1). Т.е. мы имеем дело с единым равновесным распределением для немарковских процессов, имеющим потенциально очень широкую область приложений. Вместе с тем, эти распределения не дают временной картины процессов.

Настоящая работа посвящена анализу динамики немарковских процессов. Такой анализ затруднен неразработанностью теории. Как и в случае равновесных распределений, рассмотрим три подхода. Обратимся сначала к марковским процессам. Как известно, условие марковости процесса приводит к соотношению для переходных вероятностей

$$p(t,s) = p(t,\tau)p(\tau,s). \tag{4}$$

Из этого соотношения следуют уравнения для динамики вероятностей $p(t) = \|p_i(t)\|$ нахождения системы в некотором состоянии [5].

$$dP(t)/dt = \Lambda(t)P(t). \tag{5}$$

Здесь $\Lambda(t) = \|\lambda_{ij}(t)\|$ – квадратичная матрица, определяющая эволюцию дискретной марковской системы (аналог гамильтониана в квантовой механике). Характерно, что в правой части стоит единое время t, и решение зависит лишь от начальных условий.

Для немарковских процессов, где необходимо учитывать зависимость от прошлого, аналог уравнения (5) можно записать в форме

$$dP/dt = \int_0^a \Lambda(\tau)P(t-\tau)d\tau, \tag{6}$$

где a может, в частности, принимать значения t и ∞. Т.е. процессы с памятью в принципе должны описываться интегродифференциальными уравнениями, в правой части которых стоит свертка. Эти уравнения нелокальны во времени, в отличие от марковских процессов, где в правой части (5) стоит произведение функций. Уравнение (6) является простейшим, в общем случае возникает нелинейность [6, 7] и интегродифференциальное уравнение можно представить в форме

$$dP/dt = \int \Lambda(\sigma)Q[P(t-\sigma)]d\sigma. \tag{7}$$

Здесь Q – функция, определяемая конкретными условиями задачи.

Рассмотрим свойства этих уравнений. Уравнение (6) имеет простое решение

$$P = P_0 \exp(-t/\tau), \tag{8}$$

где параметр τ определяется из условия

$$-1/\tau = \int \Lambda(\sigma)\exp(\sigma/\tau)d\sigma. \tag{9}$$

Из этого простого решения непосредственно видна нелокальность во времени. Система живет не только в настоящем, но и в будущем.

Решение нелинейных уравнений типа (7) весьма сложно; здесь возникают серьезные математические трудности. В работе [7] было найдено решение уравнения типа (7) с нелинейным оператором столкновений Больцмана Q, и соответственно, с функцией $P(r, u, t)$, зависящей от координат r и скоростей u. Оно может быть представлено в форме

$$P(u, r, t) = \sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{j=1}^{\infty} A_{jn}(r, u)\exp(\gamma_{jn}t) + \sum_{i=1}^{\infty} B_{in}\exp(\beta_{in}t)], \tag{10}$$

где A_{jn}, B_{in} – определенные функции, γ, β – корни характеристического уравнения, которые могут в зависимости от значений конкретных параметров принимать как действительные, так и комплексные значения. Т.е. в принципе для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений возникают осциллирующие решения.

Новые качественные моменты возникают из рекуррентного подхода. В простейшем случае можно рассмотреть рекуррентное соотношение (2) для чисел Фибоначчи, отнесенное к последовательным моментам времени

$$u_{t+1} = u_t + u_{t-1}. \tag{11}$$

Чтобы распределение (8) удовлетворяло (11), необходимо для величины $q = \exp(-1/\tau)$ выполнение соотношения $1+q = q^2$, определяющего золотое сечение. При этом $\tau = \tau_{gs} = \ln^{-1}[(1+\sqrt{5})/2] \approx 2{,}1$, т.е. распределение (8) с указанным значением τ соответствует распределению по золотому сечению [1]. Поскольку соотношение (11) – простейшее из рекуррентных для процессов с памятью, то распределение $P = P_0\exp(-1/\tau_{gs})$ играет роль эталонного, в частности, для процессов в биологии и экономике. Например, в распределении валового национального продукта $W = C + I + G$ отношение компонент, соответствующих непосредственному потреблению, ближней и дальней перспективе (C

– расходы на потребление, I – инвестиции, G – правительственные расходы), приблизительно соответствует золотому сечению [8]. Это, по-видимому, одна из характеристик устойчивого развития.

Инвестиции дают результаты не в тот период времени, в который они проводятся, а в более поздние сроки. Поэтому при сравнении затрат с получаемой от них прибылью возникает задача соизмерения разновременных ценностных показателей. Как известно, она решается методом дисконтирования. Чтобы определить, что стоит сегодня возможность получения некоторой суммы денег через t лет при отсутствии инфляции, нужно эту сумму разделить на $(1+R)^t$, где R – дисконтная ставка. Здесь, по существу, мы имеем дело с распределением (8), где $\tau = 1/\ln(1+R)$. Для разных экономических субъектов имеется своя дисконтная ставка R (показатель τ). Она задает меру предпочтения нынешней ценности будущей. Определенной ориентацией в стандартных условиях, как указывалось выше, служит величина τ_{gs}.

Дисконтирование – необходимый элемент анализа конкретных инвестиций. По кейнсианской инвестиционной модели (см. [9]) оценка целесообразности инвестиций в текущий период исходит из соотношения

$$K_0 < Y_1/(1+R) + Y_2/(1+R)^2 + Y_3(1+R)^3, \tag{12}$$

где Y_i – чистый доход в соответствующем периоде. На этой основе в [9] рассмотрены методы эмпирического определения τ. Распределения типа (8) могут также использоваться при анализе необходимых запасов, образования инфраструктур. Дисконтирование, как приведение показателей разных лет к сопоставимому виду, играет принципиальную роль в экологии, в частности, в известной концепции затраты – выигрыш [10].

Рассмотренное выше распределение (8) связано с линейными уравнениями и с устойчивыми ситуациями. Однако в реальных условиях возникают положительные обратные связи, проявляются эффекты ускоренного неравновесного развития. Так, фирма, которая по воле случая вырвалась вперед, приобретает преимущества, определяющие ее дальнейшее ускоренное развитие. Механизмы положительной обратной связи нарушают привычные понятия конкуренции и требуют нового подхода. Качественный феменологический анализ этого круга явлений был дан в [11], где ставился вопрос о разработке нелинейной теории вероятностей, в которой вероятность появления объектов данного типа зависит от имеющегося числа таких же объектов. Нелинейные вероятности рассматривались в рамках марковских процессов (процесс Юла)

$$P(x \to x+1, \Delta t) \sim \lambda x \Delta t, \tag{13}$$

Средняя скорость роста здесь пропорциональна объему имеющейся совокупности. Характерный пример – чем больше статей написано ученым, тем легче написать последующую. В процессе Юла имеется совокупность элементов x, которые могут порождать новые элементы, но не могут исчезать. В этих условиях вероятности $P_x(t)$ того, что объем совокупности равен x, удовлетворяют уравнению баланса

$$P_x(t) = -xP_x(t) + (x-1)P_{x-1}(t), \quad x > 1. \tag{14}$$

Рекуррентное соотношение (14), в отличие от (2), описывает марковский процесс. Его решение имеет вид

$$P_x(t) = \exp(-\lambda t)[1 - \exp(-\lambda t)]^{x-1}. \tag{15}$$

Математическое ожидание для величины x равно $x_t = \exp(-\lambda t)$, что совпадает с известным законом роста информационного массива.

Реально процесс Юла является грубой идеализацией. Всегда существует ограничение времени экспоненциального развития. Любой ученый работает конечное время t. А это означает, что дело не только в нелинейных вероятностях, но и в необходимости немарковского подхода. Принимая простейшее предположение, что вероятность прекращения работы ученым постоянна в каждый момент времени, приходим к экспоненциальному распределению для времени работы

$$p(t) = \exp(-\mu t). \tag{16}$$

Подставляя из (15) и (16) значения $P_x(t)$ и $p(t)$ под знак интеграла

$$P(x) = \int\limits_0^\infty P_x(t)p(t)dt, \tag{17}$$

получаем равновесную функцию распределения $P(x) = B(x, x+1)$. При $x \to \infty$ она переходит в гиперболическое распределение (3).

Нелинейный немарковский подход может оказаться важным звеном в описании неустойчивостей в экономике, в оценке ситуаций на бирже, анализе влияния технического прогресса. Вместе с тем, имеются и серьезные технические трудности при решении нелинейных интегродифференциальных уравнений.

В заключение выражаем признательность О. Л. Бакшеевой и А. Л. Шелепину за обсуждение и РФФИ (грант N 97-06-80045) за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Харитонов А. С., Шелепин Л. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 7-8, 79 (1996).

[2] Харитонов А. С., Шелепин Л. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11-12, 9 (1996).

[3] Лазебник Б. Д., Шелепин Л. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9-10, 35 (1997).

[4] Петров В. М., Яблонский А. И. Математика и социальные процессы (гиперболические распределения и их применение). М., Знание, 1980.

[5] Смородинский Я. А., Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. УФН, **162**, N 12, 1 (1992).

[6] Попырин С. Л. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9-10, 27 (1996).

[7] Ван-Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М., Высшая школа, 1990.

[8] Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. М., Дело, 1995.

[9] Гальперин В. И., Гребенников П. И., Леусский А. И., Тарасевич Л. С. Макроэкономика. С.-П., Экономическая школа, 1994.

[10] Защита атмосферы от промышленных загрязнений. Справочник. Часть 2. М., Металлургия, 1988.

[11] Артур У. Б. В мире науки. N 4, 60 (1990).

Поступила в редакцию 13 ноября 1997 г.