Краткие сообщения по физике № 5-1986 г.

УДК 535.14

О ФУНКЦИИ ГРИНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

П.И. Арсеев

Построена теория возмущений для функции Грина на неровной поверхности, основанная на переходе в криволинейную систему координат, в которой поверхность раздела становится плоской. Благодаря этому появляется возможность правильно описать изменение полей непосредственно вблизи поверхности.

Методы, существующие для описания различных явлений с участием электромагнитного поля на неровной границе раздела двух сред /1–5/, применимы лишь для задач типа рассеяния света поверхностью, когда существенно поведение полей вдали от границы.

В настоящей работе предлагается теория возмущений, позволяющая корректно описать поля непосредственно вблизи границы благодаря переходу в криволинейные координаты*. При этом исходный оператор возмущения содержит члены только первого и второго порядков малости характерного размера неровности ξ, в то время как при построении теории возмущений в ортогональной системе координат оператор возмущения представляет собой бесконечный ряд по степеням параметра ξ.

Запаздывающая функция Грина $D_{\alpha\beta}(\omega,\vec{r},\vec{r}\,')$ электромагнитного поля удовлетворяет уравнению /7/:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \delta_{\alpha\gamma}\Delta - \delta_{\alpha\gamma}\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega,r)\right] D_{\gamma\beta}(\omega,\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\hbar\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'), \tag{1}$$

где $x_\alpha = \{x,y,z\}$; Δ – оператор Лапласа; $\epsilon(\omega,\vec{r})$ – локальная диэлектрическая проницаемость на частоте ω, которая меняется на границе раздела от ϵ_1 до ϵ_2. Граница задается уравнением $z = \xi(\vec{\rho})$, при этом $\langle\xi\rangle = (1/L^2)\int \xi(\vec{\rho})\,d\vec{\rho} = 0$, L^2 – площадь поверхности. Среда с $\epsilon_2(\omega)$ расположена в полупространстве $z - \xi > 0$. В уравнении (1) перейдем в криволинейные координаты $x = x$, $y = y$, $u = z - \xi(\vec{\rho})$. Тогда в нем появятся члены, содержащие ξ, которые выделим в оператор возмущения:

$$[D^{-1}_{0\,\alpha\beta}(\omega,\vec{v}) + V_{\alpha\gamma}(\vec{v})]D_{\gamma\beta}(\vec{v},\vec{v}\,') = -4\pi\hbar\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{v}-\vec{v}\,'). \tag{2}$$

Здесь $\vec{v} = \{x,y,u\}$ – криволинейные координаты, $D^{-1}_{0\,\alpha\beta}(\omega,\vec{v}) = \dfrac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} - \delta_{\alpha\beta}\Delta - \delta_{\alpha\beta}\dfrac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega,u)$,

$V_{xx} = \left[\dfrac{\partial}{\partial y}\xi_y + \xi_y\dfrac{\partial}{\partial y} + (\xi_y)^2\dfrac{\partial}{\partial u}\right]\dfrac{\partial}{\partial u}$, $V_{xz} = -\xi_x\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}$, $\xi_x \equiv \partial\xi(\vec{\rho})/\partial x$, $\xi_y \equiv \partial\xi(\vec{\rho})/\partial y$, а остальные члены $V_{\alpha\beta}$ можно получить из уравнения (1).

Уравнение (2) можно записать в интегральном виде:

$$D_{\alpha\beta}(\omega,\vec{v},\vec{v}\,') = D^0_{\alpha\beta}(\omega,\vec{v},\vec{v}\,') + \frac{1}{4\pi\hbar}\int d\vec{v}_1 D^0_{\alpha\gamma}(\omega,\vec{v},\vec{v}_1)V_{\gamma\delta}(\vec{v}_1)D_{\delta\beta}(\omega,\vec{v}_1,\vec{v}). \tag{3}$$

Здесь $D^0_{\alpha\beta}$ – функция Грина, соответствующая плоской в координатах $\vec{v},\vec{v}\,'$ границе раздела.

---

* Такой переход осуществлялся и в работе /6/, однако в ней теория строилась для полей, а не для функции Грина, и не учитывалась необходимость изменения падающей и отраженной волн при переходе в криволинейную систему координат, что привело к неверному результату.

Заметим, что записанная в ортогональных координатах эта функция не является функцией Грина для случая плоской в ортогональных же координатах границы. Но при рассмотрении взаимодействия адсорбированных на поверхности молекул между собой можно пользоваться непосредственно уравнением (3), так как криволинейные координаты соответствуют в этом случае реальному положению молекул в пространстве.

При решении уравнения (3) необходимо рассматривать задачу в полном пространстве, включая переходную между двумя средами область, где $\epsilon(u)$ пусть быстро, но непрерывно меняется от ϵ_1 до ϵ_2. Если в уравнении (3) сразу перейти к резкому (разрывному) скачку диэлектрической проницаемости в точке $u = 0$, то в интеграле в правой части появились бы неопределенности типа $\int \delta(u)\,\theta(u)\,du$ (θ — ступенчатая функция) из-за разрывности некоторых компонент $D^0_{\alpha\beta}$ или их производных. Кроме того, операторы $V_{\alpha\beta}$ и $D^{-1}_{0\,\alpha\beta}$ стали бы несамосопряженными, и была бы потеряна необходимая симметрия функции Грина по первому и второму аргументам, которая в немагнитоактивных средах выражается соотношением $D_{\alpha\beta}(\omega,\vec{r},\vec{r}\,') = D_{\beta\alpha}(\omega,\vec{r}\,',\vec{r})$.

Из уравнения (3) получается следующее выражение для первой поправки к функции Грина в криволинейных координатах:

$$D^{(1)}_{\alpha\beta}(\omega,\vec{v},\vec{v}\,') = \frac{1}{4\pi\hbar} \int d\vec{v}_1\, D^0_{\alpha\gamma}(\omega,\vec{v},\vec{v}_1)\, V^{(1)}_{\gamma\delta}(\vec{v}_1)\, D^0_{\delta\beta}(\omega,\vec{v}_1,\vec{v}\,'). \qquad (4)$$

Здесь в $V^{(1)}_{\gamma\delta}$ оставлены лишь члены первого порядка по ξ. Формула (4) приводит к правильному в первом порядке изменению граничных условий для $D_{\alpha\beta}$ при переходе к резкому скачку $\epsilon(u)$. Например, теперь непрерывной по u является не функция $D^{(1)}_{xx}(u,u')$, а $D^{(1)}_{xx} + \xi_x D^0_{zx}$, что соответствует непрерывности одной из тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля.

Таким образом, формула (4) правильно описывает в первом порядке по ξ корреляции поля на самой шероховатой поверхности. Однако она не является полным выражением для поправки первого порядка к функции Грина в ортогональных координатах. Даже исходная, "нулевая" в криволинейных координатах, функция Грина содержит все порядки по ξ при переходе в ортогональную систему координат, так как

$$D^0_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\vec{\rho}\,';\ u,u') = D^0_{\alpha\beta}(\vec{\rho},\vec{\rho}\,';\ z-\xi(\vec{\rho}),\ z'-\xi(\vec{\rho}\,')).$$

Поэтому в ортогональных координатах, помимо выражения (4), в первом порядке получаем

$$D^{(1)\mathrm{ort}}_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}\,') = \left(-\xi(\vec{\rho})\frac{\partial}{\partial z} - \xi(\vec{\rho}\,')\frac{\partial}{\partial z'}\right) D^0_{\alpha\beta}(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,';\ z,z'). \qquad (5)$$

При сложении обоих членов первого порядка (4) и (5) после некоторых преобразований для функции Грина находим

$$D^{(1)}_{\alpha\gamma}(\vec{r},\vec{r}\,') = (\omega^2/4\pi\hbar c^2)\int d\vec{r}_1\, D^0_{\alpha\gamma}(\vec{r},\vec{r}_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_1)\,\xi(\vec{\rho}_1)\,\delta(z_1)\,D^0_{\gamma\beta}(\vec{r}_1,\vec{r}\,'), \qquad (6)$$

где под действием δ-функции на z-компоненты функции Грина надо понимать выражение

$$\int D^0_{\alpha z}(z,z_1)\,\delta(z_1)\,D^0_{z\beta}(z_1,z')\,dz_1 = D^0_{\alpha z}(z,-0)\,D^0_{z\beta}(+0,z'), \qquad (7)$$

а $D^0_{\alpha z}(z,\pm 0) = \lim\limits_{z_1\to\pm 0} D^0_{\alpha z}(z,z_1)$ для резкого скачка $\epsilon(z)$.

Именно такой вид $D^{(1)}_{\alpha\beta}$ был получен в работе /2/, однако следует отметить, что эта формула дает функцию Грина первого порядка лишь вдали от поверхности, так как разложение ее в ряд Тейлора не дает правильного значения полей вблизи поверхности из-за наличия разрывных компонент. Такое разложение является корректной операцией лишь при интегрировании функции Грина с непрерывно-дифференцируемыми функциями.

В случае, когда нас интересует вызванное некоторой волной локальное поле, действующее на молекулу, адсорбированную на поверхности, необходимо перейти в ортогональные координаты по тому аргументу, по которому будет производиться интегрирование с падающей волной, оставляя второй аргумент (соответствующий положению молекул) в криволинейных координатах. В первом порядке получим

$$D^{(1)}_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{v}) = -\xi(\vec{\rho})\ \frac{\partial}{\partial z}\ D^0_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{v}) + \frac{1}{4\pi\hbar}\int d\vec{r}_1 D^0_{\alpha\gamma}(\vec{r},\vec{r}_1)\, V^{(1)}_{\gamma\delta}(\vec{r}_1)\, D^0_{\delta\beta}(\vec{r}_1,\vec{v}). \tag{8}$$

В отличие от (6), применимого только для рассеяния, формула (8) дает правильные граничные условия для полей, как функций $\vec{v}$.

Для описания поцессов рассеяния света более высоких порядков можно найти, исходя из уравнения (3), общее выражение для функции Грина в ортогональных координатах.

$$D_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{r}\,') = \iiint d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 D^0_{\alpha\gamma}(\vec{r},\vec{r}_1)\, V^1_{\gamma\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\, D^0_{\nu\mu}(\vec{r}_2,\vec{r}_3)\,[\delta_{\mu\beta}\delta(\vec{r}_3-\vec{r}\,') + V^2_{\mu\rho}(\vec{r}_3)\, D_{\rho\beta}(\vec{r}_3,\vec{r}\,')], \tag{9}$$

где $V^1_{\alpha\beta}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = D^{-1}_{0\,\alpha\gamma}(\vec{r}_1)\exp\left[-\xi_1\ \frac{\partial}{\partial z_1}\right] D^0_{\gamma\nu}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\exp\left[\xi_2\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right]\cdot D^{-1}_{0\,\nu\beta}(\vec{r}_2)$,

$$V^2_{\alpha\beta}(\vec{r}) = \exp\left[-\xi\ \frac{\partial}{\partial z}\right] V_{\alpha\beta}(\vec{\rho})\exp\left[\xi\ \frac{\partial}{\partial z}\right].$$

Построенная теория возмущений позволяет с единой точки зрения сравнительно просто описывать самые разные явления с участием электромагнитного поля на неровной поверхности.

Автор благодарен Л.В. Келдышу за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maradudin A. A., Mills D. L. Phys. Rev., B 11, 1392 (1975).
2. Maradudin A. A., Zierau W. Phys. Rev., B 14, 484 (1976).
3. Maradudin A. A. In: Surface Polaritons, Ed. by V.M. Agranovich and D.L. Mills, North–Holl., 1982, p. 405.
4. Juranek H. J. Z. Phys., 233, 324 (1970).
5. Kroger E., Kretschmann E. Z. Phys., 237, 1 (1970).
6. Elson J. M., Ritchie R. H. Phys. Rev., B4, 4129 (1971).
7. Дзялошинский И. Е., Питаевский Л. П. ЖЭТФ, 36, 1797 (1959).

Поступила в редакцию 3 февраля 1986 г.