Краткие сообщения по физике № 9-1986 г.

УДК 532.5; 528.2

К УЧЕТУ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

И.А. Маслов

На основе анализа структуры нормального гравитационного поля Земли показана необходимость учета горизонтальной составляющей силы тяжести при решении задач динамики жидкости на сфере.

Исследования динамики океана базируются на математическом описании движения тонкого слоя жидкости, покрывающей поверхность вращающейся Земли.

Традиционно анализ проводится в системе геоцентрических сферических координат (λ,φ,r) в предположении, что вектор ускорения силы тяжести направлен по внутренней нормали к поверхности сферы, т.е. предполагается, что сфера является поверхностью равного потенциала силы тяжести Земли.

Рассмотрим допустимость такого предположения, исходя из характеристик потенциала нормальной силы тяжести. По данным астрономо-геодезических и гравиметрических исследований эквипотенциальные поверхности силы тяжести Земли имеют неправильную форму, не поддающуюся простому описанию. Одна из них, в первом приближении совпадающая со средним уровнем невозмущенного океана, называется геоидом.

Форма геоида, характеризующая фигуру Земли, может быть аппроксимирована семейством сплюснутых эллипсоидов вращения, которые называются эллипсоидами относимости и принимаются в качестве основы соответствующей геодезической (географической) системы координат.

Сила тяжести на эллипсоиде относимости называется нормальной силой тяжести и для ее потенциала существует строгая теория решения краевых задач, возникающих в геодезии, геофизике и астрономии.

Эллипсоиды относимости различаются размерами полуосей a и b и сжатием $\alpha = (a - b)/a$. Так, в США нашел применение эллипсоид Кларка ($\alpha = 1/295{,}0$), в Западной Европе – Хейфорда ($\alpha = 1/297{,}0$), в СССР – эллипсоид Красовского со следующими параметрами: длина большой полуоси a = 6378245 м, длина малой полуоси b = 6356963 м, сжатие $\alpha = 1/298{,}3$, радиус шара, площадь которого равна площади эллипсоида, R = = 6371116 м /1/.

Из приведенных данных видно, что фигура потенциала нормальной силы тяжести незначительно отличается от сферы. Однако направления нормалей к поверхностям сферы и эллипсоида различны. Угол между радиусом-вектором сферы и плоскостью экватора представляет собой геоцентрическую широту данной точки φ, а угол между нормалью к поверхности эллипсоида и плоскостью экватора – географическую широту Ф. Угол между нормалями к этим поверхностям в каждой точке равен $\Phi - \varphi$.

В соответствии с /2/ зависимость этого угла от сжатия эллипсоида определяется выражением

$$\Phi - \varphi = \delta = \alpha \sin 2\Phi$$

и для географической широты $\Phi = 45^\circ$ составляет $\approx 11{,}8$ угловых минут.

Следовательно, в каждой точке земной поверхности вектор нормальной силы тяжести γ направлен по нормали к поверхности соответствующего эллипсоида, аппроксимирующего форму Земли, и составляет угол δ с направлением нормали к поверхности эквивалентной сферы.

В силу этого в полярной геоцентрической системе координат необходимо на поверхности сферы учитывать две составляющие нормальной силы тяжести – нормальную, равную с точностью до членов порядка квадрата сжатия $\gamma_R = \gamma\cos\delta \approx \gamma$, и тангенциальную, направленную по касательной к плоскости меридиана в сторону уменьшения широты, равную

$$\gamma_\varphi = \gamma\sin\delta \approx \gamma\delta.$$

Для широты $\Phi = 45^\circ$ $\gamma_\varphi = 3{,}28$ см$\cdot$с$^{-2}$. Эта сила составляет лишь около 0,3% от величины силы тяжести γ, но действует на частицы жидкости в условиях отсутствия сил поддержания.

Рассмотрим изменение величины δ с глубиной по аналогии с /3/. Из рис. 1 следует, что $\delta = \delta' + u$. По закону синусов

$$\frac{\sin u}{\sin(\delta' + u)} = \frac{h}{R - h} \approx \frac{h}{R}.$$

С учетом малости u и δ можно записать $u \approx \delta h/R$. Таким образом, на глубине h значение величины δ будет определяться выражением $\delta = \alpha(1 + h/R)\sin 2\Phi$, где $h \ll R$. Следовательно, горизонтальная составляющая нормальной силы тяжести при заданной широте места будет практически неизменной с глубиной. Из приведенных данных следует, что использование геоцентрической системы координат при решении задач динамики океана на сферической Земле требует учета тангенциальной составляющей силы тяжести γ_φ и обусловленных ею эффектов. Действие γ_φ на водные массы в первом приближении эквивалентно наклону слоя воды по отношению к эквипотенциальной поверхности на угол δ.

Поскольку сила γ_φ ничем не уравновешена, то единичная масса жидкости под действием ее прийдет в движение. При этом на нее немедленно начнет действовать сила Кориолиса, которая в случае установившегося движения со скоростью v и в отсутствие силы трения уравновесит составляющую силы тяжести γ_φ. При этом движение жидкости будет происходить в направлении, нормальном вектору градиента γ_φ.

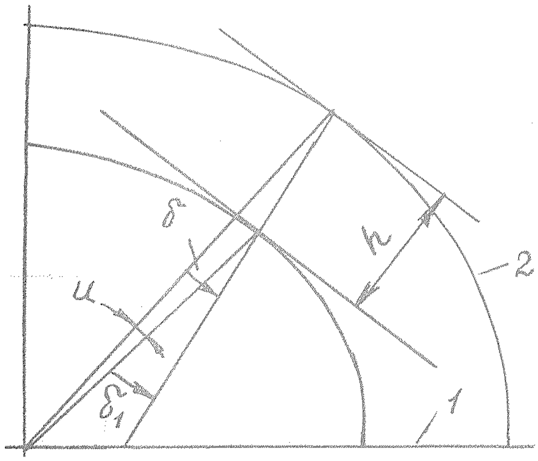

Рис. 1. Зависимость угла отклонения вертикали от глубины: 1 – плоскость экватора, 2 – эллипсоид.

Приближенно можно записать $\gamma\delta = 2\Omega v \sin\varphi$, где Ω – угловая скорость вращения Земли, или $v = \gamma\delta/2\Omega\sin\varphi$.

При $\varphi = \Phi = 45^{\circ}$, $\gamma \approx 10^3$ см·с$^{-2}$, $\Omega = 7{,}29\cdot10^{-5}$ с$^{-1}$, $\delta \approx 3{,}2\cdot10^{-3}$ скорость v установившегося вдоль параллели течения составит 320 м·с$^{-1}$, что на два порядка превышает скорость Гольфстрима (≈ 3 м·с$^{-1}$).

Таким образом, решение задач динамики океана на земной сфере в геоцентрической системе координат приводит к необходимости введения тангенциальной составляющей силы тяжести и учета вызываемых ею эффектов, обусловленных исключительно выбором системы координат.

Поэтому уравнения планетарных движений водных масс целесообразно решать в географической системе координат, в которой поверхность относимости незначительно отличается от эквипотенциальной поверхности силы тяжести.

Заметим, что при решении задач динамики океана в приближении β- или f-плоскости, в прямоугольной системе координат с началом, расположенным на некоторой фиксированной широте и долготе, вертикальная ось координатного трехгранника ориентируется по направлению вектора силы тяжести и тангенциальная составляющая в этих приближениях равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. М., Наука, 1979, с. 8.
2. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. М., Физматгиз, 1963, с. 87.
3. Броксмейер И. Ф. Системы инерциальной навигации. Л., Судостроение, 1967, с. 56.

Поступила в редакцию 29 апреля 1986 г.