Краткие сообщения по физике № 9-1986 г.

УДК 621.375.378

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ВЫРОЖДЕННОГО ДВУХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОТКЛИКА РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЫ

И.М. Бельдюгин, А.А. Степанов, В.А. Щеглов

Получена цепочка уравнений, описывающих пространственно-временную эволюцию вырожденных по частоте встречных взаимодействующих волн с учетом нестационарного отклика резонансно поглощающей либо усиливающей среды. На этой основе для стационарного случая дан весьма простой вывод известных уравнений вырожденного двухволнового взаимодействия в двухуровневых средах.

Явление двухволнового резонансного взаимодействия используется в целом ряде устройств квантовой электроники. Так, развитие генерации в лазерах (при строгом подходе) описывается взаимодействием встречных электромагнитных волн с активной средой и друг с другом. Пространственная эволюция опорных волн при вырожденном встречном четырехволновом взаимодействии в резонансных средах /1/ также (в случае слабой сигнальной волны /2/) описывается в рамках двухволнового взаимодействия. Для стационарного случая подобные уравнения приведены, например, в /3/. В данной работе выведена цепочка уравнений, описывающих двухволновое взаимодействие в резонансных двухуровневых средах с учетом нестационарного отклика активной среды. С использованием этих уравнений дан новый вывод уравнений стационарного двухволнового взаимодействия.

При описании нелинейного взаимодействия двух встречных электромагнитных волн с двухуровневой резонансной средой используем известные уравнения /4/:

$$\begin{gathered}\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2},\\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2}\frac{\partial P}{\partial t} + \omega_0^2 P = -\frac{2\omega_0}{\hbar}\mu^2 E n,\\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{T_1}(n - n_0) = \frac{2}{\hbar\omega_0} E\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{T_2}P\right).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух встречных волн ($E = E_1 + E_2$); P – поляризация среды; ω_0 – частота перехода; μ – дипольный момент; $n = (n_2 - n_1)$ – разность населенностей на рассматриваемом переходе; T_2 – время релаксации поляризации; T_1 – время релаксации населенностей; n_0 – равновесное значение разности населенностей, поддерживаемое, например, внешней накачкой.

Принимая для поля временную зависимость в виде $E = \mathcal{E}(z,t)e^{i\omega t} + \mathcal{E}^*(z,t)e^{-i\omega t}$, положим $P = \widetilde{P}(z,t)e^{i\omega t} + \widetilde{P}^*(z,t)e^{-i\omega t}$. Тогда в квазистатическом приближении ($\partial\widetilde{P}/\partial t = 0$) из второго уравнения в (1) получим

$$\widetilde{P} = \frac{\mu\mathcal{E} n T_2}{\hbar(1+\delta^2)}(i+\delta), \tag{2}$$

где $\delta = (\omega - \omega_0)T_2$ – частотная расстройка.

Пренебрегая в правой части третьего уравнения (1) вторыми гармониками по времени и учитывая (2), имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{T_1}(n - n_0) = -\frac{4\mu^2 T_2 n}{\hbar^2(1+\delta^2)}\mathcal{E}\mathcal{E}^*. \tag{3}$$

Вводя частотно-зависимую интенсивность насыщения $\mathcal{E}_s^2 = \hbar^2 (1 + \delta^2)/4\mu^2 T_1 T_2$ и частотно-зависимый коэффициент усиления (поглощения) по интенсивности $g = \sigma n$, где $\sigma = \sigma_0/(1 + \delta^2)$ – частотно-зависимое сечение радиационного перехода, σ_0 – сечение радиационного перехода в центре линии (в случае однородного уширения), на основании (3) имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (g - a_0) = -\frac{1}{T_1} gee^*, \tag{4}$$

где $e = \mathcal{E}/\mathcal{E}_s$ – нормированное электрическое поле; $a_0 = \sigma n_0$ – частотно-зависимый коэффициент усиления (по интенсивности), создаваемый внешней накачкой.

Обращаясь к первому уравнению в (1) и представляя поле $\mathcal{E}$ в виде $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = A_1 e^{-ik_1 z} + a_2 e^{-ik_2 z}$ (здесь k_j – волновой вектор j-ой волны и z – направление распространения волны E_1), для медленно меняющихся амплитуд $A_1(z,t)$ и $A_2(z,t)$ в пренебрежении дифракционными эффектами стандартным методом /5/ получим:

$$\sum_{j=1}^{2} \left(k_j \frac{\partial A_j}{\partial z} + \frac{1}{v} k \frac{\partial A_j}{\partial t} \right) e^{-ik_j z} = -i2\pi k^2 \tilde{P}, \tag{5}$$

где $k = |k_j|$; v – скорость распространения волн.

Заметим, что при однородном уширении спектральных линий (а мы для простоты лишь этим случаем и ограничимся) формула (2) эквивалентна известному соотношению

$$\tilde{P} = \frac{g\mathcal{E}}{4\pi k} (i + \delta), \tag{6}$$

поэтому, вводя нормированные комплексные амплитуды поля $a_j = A_j/\mathcal{E}_s$, с учетом (6) приведем (5) к виду

$$\sum_{j=1,2} \left(k_j \frac{\partial a_j}{\partial z} + \frac{1}{v} k \frac{\partial a_j}{\partial t} \right) e^{-ik_j z} = \frac{1}{2} k (1 - i\delta) g e. \tag{7}$$

Поскольку при встречном взаимодействии $k_1 + k_2 = 0$, $ee^* = a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_1 a_2^* e^{-i2k_1 z} + a_1^* a_2 e^{i2k_1 z}$, и с учетом вида правой части (4) $g(z,t)$ можно искать в виде

$$g(z,t) = g_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} [g_m(t) e^{-i2mk_1 z} + g_m^*(t) e^{i2mk_1 z}]. \tag{8}$$

Подставив (8) в (7) и собирая в левой и правой частях члены с одинаковыми быстрыми сомножителями $e^{-i2k_1 z}$ и $e^{i2k_1 z}$, получим уравнения для медленных амплитуд $a_j(z,t)$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial a_1}{\partial t} = \frac{1}{2} (1 - i\delta)(g_0 a_1 + g_1 a_2), \\ -\frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial a_2}{\partial t} = \frac{1}{2} (1 - i\delta)(g_1^* a_1 + g_0 a_2). \end{gathered} \tag{9}$$

Далее, учитывая (8) и выражение для $e(z,t)$, из (4) аналогичным образом находим бесконечную цепочку связанных уравнений для коэффициентов $g_m(t)$:

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{1}{T_1}(g_0 - a_0) = -\frac{1}{T_1}\left[(a_1 a_1^* + a_2 a_2^*) g_0 + a_1^* a_2 g_1 + a_1 a_2^* g_1^*\right],$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} + \frac{1}{T_1} g_k = -\frac{1}{T_1}\left[(a_1 a_1^* + a_2 a_2^*) g_k + a_1^* a_2 g_{k+1} + a_1 a_2^* g_{k-1}\right], \quad k = 1,2,3,... \tag{10}$$

На общем анализе полученных уравнений мы здесь не останавливаемся, а обратимся сразу к случаю стационарного взаимодействия.

Пренебрегая временной зависимостью переменных, приведем (9) и (10) к виду:

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - i\delta)(g_0 a_1 + g_1 a_2); \quad -\frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - i\delta)(g_1^* a_1 + g_0 a_2), \tag{11}$$

$$(1 + I_1 + I_2) g_0 + p g_1 + p^* g_1^* = a_0,$$

$$(1 + I_1 + I_2) g_k + p g_{k+1} + p^* g_{k-1} = 0, \quad k = 1,2,3,..., \tag{12}$$

где $p = a_1^* a_2$, $I_1 = a_1 a_1^*$, $I_2 = a_2 a_2^*$.

Положив $g_k = \lambda^k$, из второго уравнения (12) получим

$$\lambda^2 + [(1 + I_1 + I_2)/p]\lambda + p^*/p = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $\lambda_{1,2} = \frac{1 + I_1 + I_2}{2p}\left[\sqrt{1 - \frac{4pp^*}{(1 + I_1 + I_2)^2}} \mp 1\right]$. Поскольку $pp^* = I_1 I_2$; то $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| > 1$. Общее решение системы однородных уравнений для g_k имеет вид: $g_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k$ $(k = 0, 1, 2, ...)$, где C_1 и C_2 — некоторые константы.

Интересуясь лишь ограниченным решением для g_k, принимаем $C_2 = 0$. Тогда из первого уравнения (12) $C_1 = a_0/[(1 + I_1 + I_2) + (p + p^*)\lambda_1]$.

Таким образом, выражения для g_0 и g_1 приводятся к виду:

$$g_0 = a_0/\Delta, \quad g_1 = \frac{a_0}{2a_1^* a_2}\left(1 - \frac{1 + I_1 + I_2}{\Delta}\right),$$

где $\Delta = [(1 + I_1 + I_2)^2 - 4I_1 I_2]^{1/2}$. Подставив эти соотношения в (11), окончательно получим:

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{(1 - i\delta) a_0 a_1}{2\Delta}\left\{1 + \frac{1}{2I_1}[\Delta - (1 + I_1 + I_2)]\right\},$$

$$-\frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{(1 - i\delta) a_0 a_2}{2\Delta}\left\{1 + \frac{1}{2I_2}[\Delta - (1 + I_1 + I_2)]\right\}. \tag{13}$$

Уравнения (13) в точности совпадают с известными уравнениями двухволнового взаимодействия, приведенными, например, в /2,3/.

Подход, аналогичный изложенному, можно применять и при рассмотрении вырожденного четырехволнового взаимодействия в резонансных средах. Правда, в этом случае вывод основных соотношений оказывается более громоздким и требует особого рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abrams R. L., Lind R. C. Opt. Lett., 12, 4, 94 (1978).
2. Gruneisen M. T., Gaeta A. L., Boyd R. W. JOSA, B2, 7, 1117 (1985).
3. Бутылкин В. С. и др. Резонансные взаимодействия света с веществом. М., Наука, 1977.
4. Пантел Р., Путхов Г. Основы квантовой электроники. М., Мир, 1972.
5. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М., Мир. 1966.

Поступила в редакцию 26 мая 1986 г.