УДК 530.1;519.6

ДИСКРЕТНОЕ ОПИСАНИЕ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

О. Л. Бакшеева, Л. А. Шелепин

В рамках немарковского подхода рассмотрена простейшая модель – аналог двухуровневой системы в квантовой механике. Показано, что известная теория Кейнса учитывает немарковский характер экономических процессов.

В работе [1] были рассмотрены уравнения, описывающие немарковские процессы, или процессы с памятью. В общем случае это нелинейные интегродифференциальные уравнения вида

$$dP(t)/dt = \int \Lambda(\tau) Q[P(t-\tau)] d\tau, \tag{1}$$

где $P(t)$ – вероятностная функция, $\Lambda(\tau)$ задается конкретными условиями, Q – нелинейный оператор. При $Q(P) = P$ уравнение (1) становится линейным. Переходя в этом случае к дискретному описанию, имеем

$$[P_t - P_{t-1}]/[t-(t-1)] = \sum_{i=1}^{n} \Lambda(i) P(t-i). \tag{2}$$

В результате получаем конечно-разностное немарковское уравнение

$$P_t = F(t-1, t-2, ..., t-n, t). \tag{3}$$

Наиболее простое уравнение этого типа, сохраняющее немарковские свойства, имеет вид

$$P_t = a_1 P_{t-1} + a_2 P_{t-2} + f(t). \tag{4}$$

Решение (4) находится с помощью характеристического уравнения [2]

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0, \tag{5}$$

имеющего корни $\lambda_{1,2} = (\alpha_1/2) \pm \sqrt{(\alpha_1^2/4) + \alpha_2}$. При действительных $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оно имеет вид

$$P_e = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t, \tag{6}$$

при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$P_t = (A_1 + A_2 t)\lambda^t. \tag{7}$$

Величины A_1 и A_2 определяются из начальных условий (значений P_t при $t = 0, 1, ..., n-1$).

Для немарковских процессов уравнение (4) играет принципиальную роль. Эта базовая модель, содержащая два состояния, является своеобразным аналогом двухуровневой системы в квантовой механике (для марковских процессов). Она описывает целую совокупность режимов для процессов с памятью. При дискриминанте $D = \alpha_1^2 + 4\alpha_2 > 0$ имеется два корня. Если $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, то обе компоненты решения (6) – монотонные геометрические прогрессии, если имеется отрицательный корень, то возникает знакочередующаяся составляющая. Случаю $D = 0$ соответствует решение (7). При $D < 0$ решение можно представить в виде

$$P_t = \rho^t(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t), \tag{8}$$

где $\lambda_{1,2} = \rho(\cos\omega t + i\sin\omega t)$, $\rho = |\lambda_1| = |\lambda_2|$, B_1, B_2 – постоянные, определяемые начальными условиями. В этом случае решение имеет колебательный характер. Амплитуда колебаний может возрастать при $\rho > 1$ и убывать при $\rho < 1$. Решение считается устойчивым, если $P_t \to 0$ при $t \to \infty$. Условие устойчивости имеет вид $-1 < \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|$.

Если это условие не выполняется, то проявляется неустойчивость – возникают взрывные нарастающие колебания или неограниченный рост. Таким образом, в базовой двухуровневой немарковской модели режим системы определяется ее конкретными параметрами.

Как известно, теория Кейнса, являясь фундаментом современной макроэкономики, нашла широкое применение в практике. Ряд конкретных моделей экономической динамики Кейнса по существу основывался на двухуровневой немарковской системе. В динамической модели Самуэльсона–Хикса [4, 5], включающей в себя рынок благ, экономика находится в состоянии рановесия, если

$$y_t = (C_y + \kappa) y_{t-1} - \kappa y_{t-2} + A_t. \tag{9}$$

Здесь y_t – совокупный спрос (национальный доход), $I_e^{in} = \kappa(y_{t-1} - y_{t-2})$ – индуцированные инвестиции, вкладываемые предпринимателями, ориентирующимися на повышение совокупного спроса в предшествующем периоде, $C_y y$ – функция потребления, A_t – экзогенная величина автономного спроса. Уравнение (9) характеризует динамику национального дохода. В соответствии с приведенным выше анализом немарковской системы (4), если $(C_y + \kappa)^2 - 4\kappa > 0$, то y_t меняется монотонно, если меньше нуля, то изменение y_t происходит колебательно. Всего имеется пять типов изменения y_t. Каждому из них соответствует своя область параметров C_y и κ.

В динамической модели Тевеса [6] учитывается денежный рынок, который взаимодействует с рынком благ через ставку процента i. Она также записывается в канонической форме [4]

$$y_t = (C_y + \kappa) y_{t-1} - (\kappa + I_i L_y / L_i) + A_t''. \tag{10}$$

Здесь I_i – инвестиции, $M = L_y y + L_i i$ – условия равновесия на рынке денег, M – предложение денег, заданное экзогенно, L_y – спрос на деньги для сделок, L_i – спрос на деньги как на имущество, $A_t'' = A_t - I_i + M I_i / L_i$.

В модели Тевеса, учитывающей рынок денег, условия устойчивости меняются по сравнению с моделью Самуэльсона–Хикса. При этом область устойчивого равновесия сужается. Из свойств двухуровневой немарковской системы, описываемой (4), вытекает возможность ее регулирования подходящим изменением параметров. В [7] рассматривалась возможность регулирования конъюнктурных колебаний экономической активности через посредство банковской системы. Так, при ориентации объема предложения денег Центральным банком на величину национального дохода предшествующего периода и текущую ставку процента динамическая функция предложения денег может быть представлена в виде $M_t = a y_{t-1} + b_i$, где a, b – параметры регулирования денег в обращении. В этом случае уравнение для y_t может быть представлено в канонической форме [4]

$$y_t = (C_y + \kappa) y_{t-1} - (\kappa - h) y_{t-2} + A', \tag{11}$$

где $h = I_i(a-L_y)/(L_i-b)$. За счет соответствующего подбора регулирующих параметров a и b Центральный банк может сдвигать области устойчивого равновесия, например так, чтобы в случае возмущений возникали не взрывные, а затухающие колебания.

Двухуровневая схема (4) применяется и в посткейнсианских моделях, описывающих равновесный рост за длительный период. Это относится, в частности, к модели Харрода [8], где был сделан вывод о неустойчивости динамического равновесия в условиях экономического роста (без технического прогресса). Таким образом, теория Кейнса в той или иной мере учитывает немарковский характер экономических процессов и многое в ней может получить обоснование из первых принципов.

Выше были рассмотрены уравнения типа (4), т.е. аналоги квантовых систем с двумя состояниями. Могут применяться и аналоги систем с большим числом состояний, например, с тремя

$$P_t = a_1 P_{t-1} + a_2 P_{t-2} + a_3 P_{t-3}.$$

Методика их анализа рассмотрена в [2]. Уравнения этого типа могут быть применены для исследования временных рядов и вероятностного предсказания изменений, в частности, при колебаниях биржевого курса.

Уравнения типа (1) и их дискретные формы составляют лишь часть немарковского подхода. Чтобы понять ситуацию, обратимся сначала к аналогиям из квантовой статистики [9]. В ее основе, как известно, лежит уравнение

$$\partial\rho/\partial t = (i/h)[\rho, H], \tag{12}$$

где ρ – матрица плотности, H – гамильтониан системы. Это уравнение неравновесной квантовой теории. Для равновесной теории справедливо уравнение Блоха

$$\partial\rho/\partial\beta = H\rho, \tag{13}$$

где $\beta = 1/T$ – обратная температура.

Немарковские (линейные) аналоги уравнений (12), (13) можно записать в форме (ср. [1])

$$\partial P(t)/\partial t = \int \Lambda(\tau) P(t-\tau) d\tau, \tag{14}$$

$$\partial P(S)/\partial S = \int R(\sigma) P(S-\sigma) d\sigma, \tag{15}$$

где S – негэнтропия. Уравнение (15) имеет простое решение типа

$$P = P_0 \exp(-S/\Theta), \tag{16}$$

где θ определяется из соотношения $-1/\theta = \int R(\sigma) \exp(\sigma/\theta) d\sigma$, что соответствует распределению $P(t) = P_0 \exp(-t/\tau)$, рассмотренному в [1].

Негэнтропия S характеризует степень упорядоченности, сложность структуры, и распределения по S естественным образом возникают в самых различных биологических, экономических и социальных проблемах [10, 11]. Наряду с (16), здесь значительный интерес представляет возможность использования двухуровневой немарковской модели типа (4)

$$y_S = b_1 y_{S-1} + b_2 y_{S-2} + f(S), \tag{17}$$

в которой существуют решения типа (6) – (8), могут реализоваться колебательные (по S) режимы и возникать неустойчивости. Такой подход может оказаться полезным при анализе совокупностей фазовых переходов.

В целом, наиболее существенный момент проведенного рассмотрения состоит в том, что показана немарковская природа экономических моделей теории Кейнса и вырисовываются пути их дальнейшего совершенствования.

Авторы выражают признательность А. Л. Шелепину и РФФИ (грант N 97–06–80045) за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Харитонов А. С., Шелепин Л. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 1, 17 (1998).

[2] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., Наука, 1967.

[3] Кейнс Дж. Общая теория занятости, процента и денег. М., 1978.

[4] Samuelson H. Rev. Econ. Stat., **21**, 75 (1939).

[5] Hicks J. A contribution to the theorie of the trade cycle. Oxford, 1950.

[6] Thewes T. Weltwirtshaft. Arch., N 96 (1996).

[7] Гальперин В. М., Гребенников П. И., Леусский А. И., Тарасевич Л. С. Макроэкономика. С.-П., Высшая школа, 1994.

[8] Harrod R. Econ. Journ., **49**, N 3, 1939.

[9] Исихара А. Статистическая физика. М., Мир, 1973.

[10] Быстрова Т. В., Шелепин Л. А. Труды ФИАН, **218**, 60 (1994).

[11] Лазебник Б. Д., Шелепин Л. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9 – 10, 35 (1997).

Поступила в редакцию 3 декабря 1997 г.