Краткие сообщения по физике № 6-1986 г.

УДК 535.7:533.9

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АНОМАЛЬНОГО ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ЗАМАГНИЧЕННОМ ПУЧКЕ ЭЛЕКТРОНОВ

А.Т. Богданов, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе

Теория излучения замедленной спиральной волны релятивистским электронным пучком малой плотности вследствие аномального эффекта Доплера обобщена на случай плотных пучков. Показано, что с ростом плотности пучка механизм аномального эффекта Доплера сменяется нормальным. Найдено аналитическое решение нелинейной задачи излучения, амплитуда и структура волны на стадии насыщения.

Излучение в условиях аномального эффекта Доплера имеет место, если скорость пучка u превосходит фазовую скорость излучаемой волны. При этом потеря энергии направленного движения пучка сопровождается увеличением размаха колебательного движения его электронов /1/. Характерным примером аномального эффекта Доплера является излучение моноскоростным пучком, движущимся в постоянном магнитном поле, циркулярно поляризованной замедленной электромагнитной волны. Линейная теория такого эффекта была развита в работах /2,3/, нелинейное рассмотрение проводилось в /4/. В работах /5,6/ получено точное аналитическое решение соответствующей нелинейной задачи для случая пучка малой плотности. Ниже дано обобщение этих работ на плотные пучки.

Направляя ось z вдоль внешнего магнитного поля и считая, что $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, запишем следующую систему нерелятивистских уравнений:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} = \frac{mc}{e} \omega_b^2 v_\perp,$$

$$\frac{\partial v_\perp}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_\perp}{\partial z} + i\omega_H v_\perp = -\frac{e}{mc}\left(\frac{\partial A_\perp}{\partial t} + v_z \frac{\partial A_\perp}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{e}{mc}\left(\frac{\partial A_\perp}{\partial z} v_\perp^* + \frac{\partial A_\perp^*}{\partial z} v_\perp\right).$$

Здесь $A_\perp = A_x + iA_y$ – вектор-потенциал; $u_\perp = v_x + iv_y$ – поперечная скорость пучка, v_z – его продольная скорость; c_0 – фазовая скорость электромагнитной волны; ω_H – электронная циклотронная частота; ω_b – ленгмюровская частота электронов пучка. Считается, что имеется замедление волн, то есть $c_0 < u$, где $u = v_z(t = 0)$. Решение системы (1) ищем в виде

$$A_\perp = A_0(t)e^{i(\omega t - kz)}, \quad v_\perp = V_0(t)e^{i(\omega t - kz)}, \tag{2}$$

$$v_z = u + v', \quad \omega = kc_0 = ku - \omega_H,$$

где A_0 и V_0 – медленные по сравнению с $\exp(i\omega t)$ функции времени. Из (2) следует, что правая часть последнего уравнения системы (1) не зависит от z, то есть $\partial v_z/\partial z = 0$.

Подставляя (2) в (1), с учетом медленности A_0 и V_0 получим следующие уравнения:

$$d\epsilon/d\tau = -\,i\mu V, \quad dV/d\tau - i\tilde{v}\,(V + \epsilon) = i\epsilon,$$

$$d\tilde{v}/d\tau = (i/2)\,(V\epsilon^* - V^*\epsilon), \tag{3}$$

где $\tau = \omega_H t$; $V = V_0/(u - c_0)$; $\epsilon = eA_0/mc(u - c_0)$; $\tilde{v} = v'/(u - c_0)$; $\mu = \omega_b^2/2\omega\omega_H$ – параметр, определяющий плотность пучка. Система (3) имеет следующие интегралы движения:

$$x \equiv |\epsilon|^2 - |\epsilon_0|^2 = \mu(\tilde{v}^2 + |V|^2),$$

$$2\mu\tilde{v} = -\,x, \tag{4}$$

где $\epsilon_0 = \epsilon(\tau = 0)$. Из (4) находим связь между амплитудой поперечной скорости пучка $|V|$ и амплитудой волны $|\epsilon|$: $|V|^2 = x/\mu - x^2/4\mu^2$. Как видно из рис. 1, эта связь неоднозначна. Если $x < 2\mu$, то изображающая точка движется на плоскости $(|V|^2, x)$ от "a" к "b" и обратно. Этот процесс исследован в /5,6/. При $x = 2\mu$ (в точка "c") $\tilde{v} = -\,1$, что означает торможение пучка до фазовой скорости c_0. Если же $x > 2\mu$, то на участке от "c" до "d" поперечная скорость уменьшается, продольная скорость становится меньше c_0, а амплитуда поля растет. Иными словами, на участке "cd" аномальный эффект Доплера уступает место эффекту нормальному. На это впервые было указано в работе /7/ на основе анализа интегралов движения релятивистской системы. В ней, однако, не найдено условие на плотность пучка, начиная с которой аномальный эффект может перейти в нормальный, не выяснена роль релятивизма в этом переходе и не получены аналитические решения.

Для ответа на поставленные вопросы введем вещественные амплитуды и фазы: $\epsilon \to \epsilon e^{i\varphi}$, $V = Ve^{i\theta}$, $\Psi = \theta - \varphi$ и перепишем (3) в виде

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \mu V \sin\Psi, \quad \frac{dV}{d\tau} = \left(1 - \frac{x}{2\mu}\right)\epsilon\sin\Psi,$$

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \cos\Psi\left[\mu\,\frac{V}{\epsilon} + \left(1 - \frac{x}{2\mu}\right)\frac{\epsilon}{V}\right] - \frac{x}{2\mu}\,. \tag{5}$$

Учитывая, что, помимо (4), уравнения (5) имеют еще один интеграл движения $8\mu^2\epsilon V\cos\Psi = x^2$, получим из (5) одно уравнение для величины x:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{4\mu}\,[16\mu^2 x\,(4\mu - x)\,(\epsilon_0^2 + x) - x^4]^{1/2}. \tag{6}$$

Предположим, что поле включается адиабатически при $\tau \to -\infty\,(\epsilon_0 = 0)$. Определяя для этого случая положительный корень подкоренного выражения в (6), находим максимальную амплитуду электромагнитной волны:

$$\epsilon_{max}^2 = x_{max} = 8\mu^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\mu}} - 1\right) = \begin{cases} 8\mu^{3/2}, & \mu \ll 1, \\ 4\mu, & \mu \to \infty. \end{cases} \tag{7}$$

Режим аномального эффекта Доплера сменяется режимом нормального эффекта при $x > 2\mu$. Из (7) находим необходимое для смены режима излучения условие на плотность пучка:

$$\mu > 1/8. \tag{8}$$

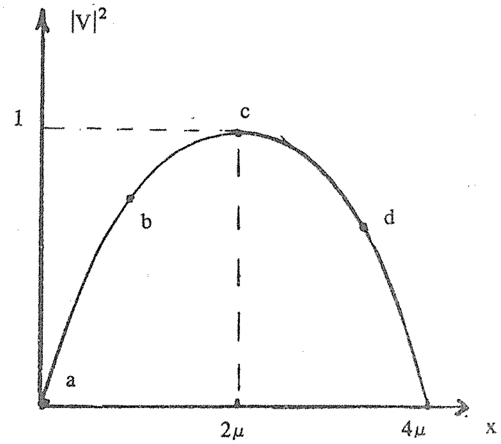

Рис 1. Фазовый портрет системы "пучок-поле".

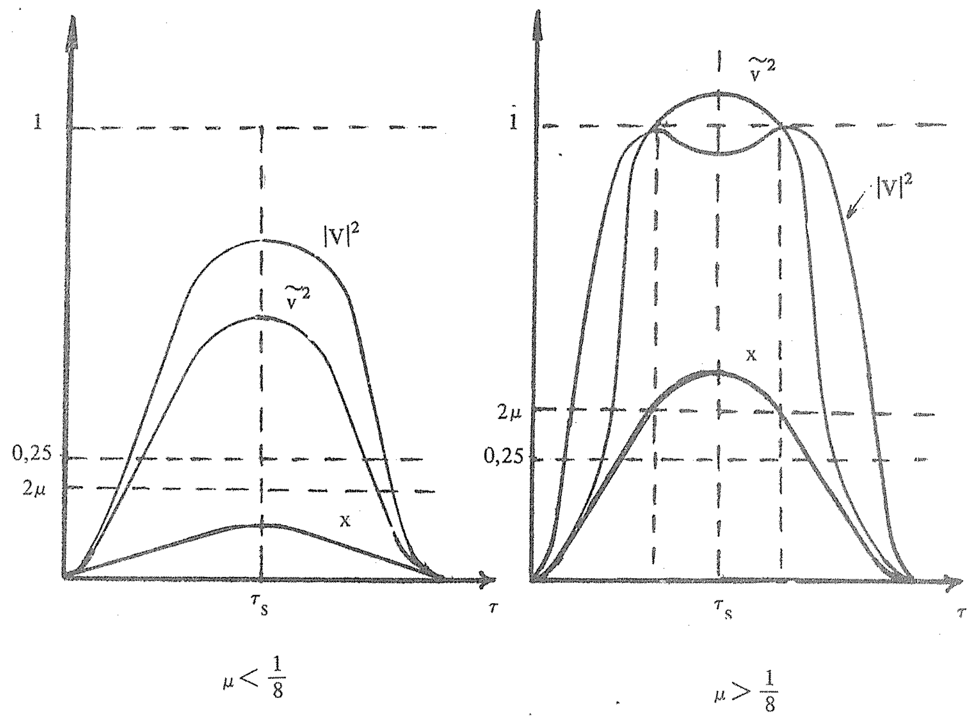

Рис. 2. Примерное поведение динамических величин во времени.

При существенно меньших μ справедливы результаты работ /5,6/. Из (7) также следует, что максимально возможное значение амплитуды электромагнитной волны ($x = 4\mu$) достигается лишь при $\mu \to \infty$, т. е. реально недостижимо.

Область применимости полученных результатов следует из предположения о медленности изменения амплитуд A_0 и V_0 в выражениях (2). Это предположение эквивалентно неравенству $|\delta\omega| \ll \omega$, где $\delta\omega$ – величина порядка линейного инкремента, которое сводится к условию

$$\sqrt{\mu} \ll c_0/(u - c_0).$$

Последнее совместимо с (8), если c_0 ненамного меньше u. Подставляя в (8) явное выражение μ, получаем вместо (8) следующее:

$$\omega_b^2/\omega_H^2 > (1/4)\,c_0/(u - c_0). \qquad (9)$$

Таким образом, эффект смены механизма излучения должен проявляться лишь в сравнительно слабом магнитном поле. Подчеркнем также, что хотя эффект перехода аномального доплеровского механизма излучения в нормальный установлен в /7/ для релятивистского пучка, в условиях (8) (или (9)) он имеет место и в нерелятивистском случае.

При малых μ и адиабатическом включении поля решение нелинейной задачи определяется формулами:

$$x = x_{max}/\mathrm{ch}(2\sqrt{\mu}\tau), \quad -\infty < \tau < \infty,$$

$$\widetilde{v} = -\,x/2\mu, \quad V^2 = (x/\mu)\,(1 - x/4\mu). \qquad (10)$$

В общем случае решение имеет более громоздкий вид, но качественно подобно (10). Два характерных примера приведены на рис. 2. Отметим только, что при неадиабатическом включении поля время насыщения неустойчивости конечно $\tau_s = (1/\sqrt{\mu})\ln(4\epsilon_{max}/\epsilon_0)$, а максимальная амплитуда дается формулой

$$\epsilon_{max}^2 = \left(8\mu^2\sqrt{1 + \frac{1}{\mu}} + \frac{\epsilon_0^2}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\mu}}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Незлин М. В. УФН, 120, № 3, 481 (1976).
2. Железняков В. В. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 2, № 1, 14 (1959).
3. Железняков В. В. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 3, № 1, 57 (1960).
4. Красовицкий В. Б., Курилко В. И. ЖЭТФ, 49, № 6, 1831 (1965).
5. Богданов А. Т., Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции "Взаимодействие электромагнитных излучений с плазмой". Ташкент, 1985, с. 167–168.
6. Богданов А. Т., Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 29, вып. 11, 1986.
7. Гинзбург Н. С. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 22, № 4, 470 (1979).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 4 марта 1986 г.