Краткие сообщения по физике № 9-1985 г.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МНОГОВОЛНОВЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

М.В. Кузелев, В.А. Панин, А.А. Рухадзе

УДК 533.9.537.5

Рассмотрено одномодовое по поперечному волновому числу параметрическое возбуждение замагниченного волновода пучком малой плотности. Получены многоволновые уравнения, связывающие амплитуды четырех волноводных и шести пучковых волн и охватывающие все многообразие взаимодействующих волн в рассматриваемом случае.

Обилие различных ветвей нормальных колебаний плазменных волноводов обуславливает чрезвычайное многообразие процессов их параметрического возбуждения электронными пучками. Так, даже в случае полностью замагниченного плазменного волновода число параметрически связанных пар собственных волн равно шести, и то лишь при условии одномодового по поперечному волновому числу взаимодействия /1/. Обычно параметрические неустойчивости исследуют методом трехволновых уравнений, связывающих амплитуды двух волноводных и одной пучковой волн. Возможность одновременного возбуждения других мод волновода при этом не рассматривалась. Тем самым в теории параметрических неустойчивостей по-существу обходят стороной важную для электроники СВЧ проблему нелинейной конкуренции мод.

Настоящая работа посвящена выводу уравнений многоволновых параметрических пучково-плазменных неустойчивостей. По своей сути эти уравнения близки к обычным трехволновым уравнениям, известным из теории взаимодействия электромагнитных и пучковых волн с регулярными фазами /1 – 4/. В работе рассмотрено одномодовое по поперечному волновому числу параметрическое возбуждение полностью замагниченного плазменного волновода пучком малой плотности. Даже в этом простейшем случае многоволновые уравнения связывают амплитуды четырех волноводных и шести пучковых волн.

Условия резонансного взаимодействия двух волноводных и пучковой волн записываются в виде /1/:

$$\omega_i - \omega_j = \omega_{ij}, \quad k_{zi} - k_{zj} = k_{ij}, \quad \omega_{ij} - k_{ij}u = \pm \Omega_b(k_{ij}), \tag{1}$$

где знак плюс соответствует синхронизму с быстрой, а минус – с медленной волнами плотности заряда пучка. Частоты и волновые числа волноводных мод (для определенности рассматривается основная мода Е-типа) связаны между собой дисперсионным уравнением

$$D_{1\alpha} \equiv k_{\perp 1}^2 + (k_{z\alpha}^2 - \omega_\alpha^2/c^2)(1 - \omega_p^2/\omega_\alpha^2) = 0, \quad \alpha = i, j, \tag{2}$$

где ω_p – ленгмюровская частота электронов плазмы*, а частота плазменных колебаний пучка Ω_b дается выражением

$$\Omega_b^2(k_z) = \omega_b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_{\perp n}^2 - \omega_p^2/u^2} \; \frac{S_b \varphi_n^2(\vec{r}_b)}{\|\varphi_n\|^2} . \tag{3}$$

Здесь ω_b – ленгмюровская частота электронов пучка; u – его скорость; $k_{\perp n}^2$ – собственное число порядка n; φ_n – соответствующая собственная функция волновода; $\|\varphi_n\|$ – ее норма. При получении (3) пучок предполагался тонким, т.е. профиль его плотности задавался в виде $S_b \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_b)$, где S_b – площадь поперечного сечения, $\vec{r}_b$ – средняя координата пучка.

Если плотность пучка мала, то, как видно из (1), разность $\omega_\alpha - k_{z\alpha} u = \Omega$ не зависит от индекса α. Частота Ω однозначно определяется волной накачки, в качестве которой можно выбрать любую моду волновода. Условие малой плотности пучка сводится к важному для дальнейшего неравенству

$$\omega_b^2 \ll \Omega^2 . \tag{4}$$

На рис. 1 показаны и пронумерованы взаимодействующие в условиях (1), (4) волноводные моды (2). Их четыре, и образуют они, как это легко видеть, шесть пар. В соответствии с этим представим поляризационный потенциал волноводного поля в виде

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{4} \Psi_\alpha + \Psi_0 , \tag{5}$$

---

* Плотность плазмы следует ограничить сверху так, чтобы $\omega_p^2 < k_{\perp 1}^2 u^2$. При этом обычная черенковская неустойчивость оказывается невозможной.

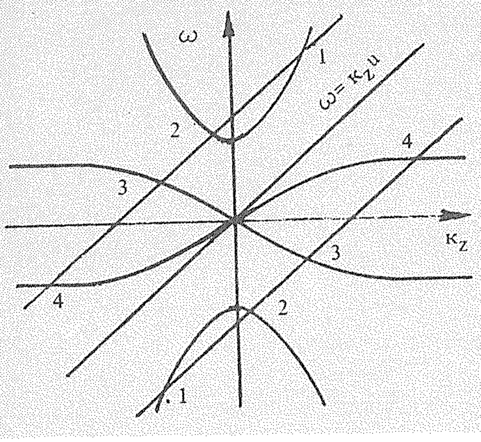
где

$$\Psi_a = \frac{1}{2}\varphi_1(\vec{r}_\perp)\,[A_a(t)\,e^{-i\omega_a t + ik_{za}z} + \text{к.с.}]$$

– вклад от какой-либо волноводной моды (нумерация соответствует принятой на рис. 1), а

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}[A_{oij}(\vec{r}_\perp, t)\,e^{-ik_{ij}ut + ik_{ij}z} + \text{к.с.}]$$

– вклад в поле от модуляции пучка комбинационной волной.



Р и с. 1. Резонансно взаимодействующие волноводные моды при малой плотности пучка.

Для дальнейшего корректного вывода многоволновых уравнений предположим, что все возмущения имеют общий пространственный период L, т.е. волновые числа k_{za} суть целые кратные от π/L. Последнее позволяет при выводе использовать ортогональность функций $\exp(k_{za}z)$, $a = 1, 2, 3, 4$. Период L вводится по существу формально, поэтому в окончательных уравнениях его следует выбирать главным образом из соображений удобства.

Учитывая сказанное, подставим (5) в уравнение для поляризационного потенциала,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi = 4\pi(\rho_p + \rho_b).$$

При вычислении возмущений плотности заряда плазмы ρ_p используем линейное приближение, а при вычислении возмущений плотности заряда пучка ρ_b – метод интегрирования по траекториям /1 – 4/. В результате получим следующие уравнения:

$$k_{z\alpha} \frac{\partial D_1 \alpha}{\partial \omega} \frac{dA_\alpha}{dt} = \frac{m}{e} \omega_b^2 G \frac{2}{L} \int_0^L e^{i\omega_\alpha t - ik_{z\alpha} z} dz_0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

$$(\Delta_\perp - k_{ij}^2 - \frac{\omega_p^2}{u^2}) A_{oij} = - i \frac{m}{e} \frac{\omega_b^2}{k_{ij}} S_b \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_b) \frac{2}{L} \int_0^L e^{ik_{ij} ut - ik_{ij} z} dz_0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{4} \Psi_\alpha + \Psi_0 \right), \quad z|_{t=0} = z_0,$$

где $G = S_b \varphi_1^2 (\vec{r}_b) / \|\varphi_1\|^2$.

Учитывая неравенство (4), представим координату электрона пучка в виде:

$$z = ut + z' + \tilde{z}, \tag{7}$$

где

$$\tilde{z} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \varphi_1 \sum_{\alpha=1}^{4} \left(\frac{\kappa_\alpha^2}{\Omega^2} A_\alpha e^{- i(\omega_\alpha - k_{z\alpha} u) t + ik_{z\alpha} z'} + \text{к.с.} \right) \tag{8}$$

– быстро осциллирующая составляющая $(\kappa_\alpha^2 = k_{z\alpha}^2 - \omega_\alpha^2/c^2)$, а z' – медленная функция времени. Подставляя далее (7) и (8) в систему (6) и исключая из нее амплитуды A_{oij}, получим после громоздких, но простых выкладок, следующую окончательную систему уравнений в многоволновом приближении:

$$\frac{\partial D_{11}}{\partial\omega}\frac{dA_1}{dt}=-\frac{i}{2}\frac{\omega_b^2}{\Omega^2}G\left\{\kappa_2^2A_2\rho_{12}e^{i\widetilde{D}_{12}t}+\kappa_3^2A_3\rho_{13}e^{i\widetilde{D}_{13}t}+\right.$$
$$\left.+\kappa_4^2A_4\rho_{14}e^{i\widetilde{D}_{14}t}\right\}$$

$$\frac{\partial D_{12}}{\partial\omega}\frac{dA_2}{dt}=-\frac{i}{2}\frac{\omega_b^2}{\Omega^2}G\left\{\kappa_1^2A_1\rho_{12}^*e^{-i\widetilde{D}_{12}t}+\kappa_3^2A_3\rho_{23}e^{i\widetilde{D}_{23}t}+\right.$$
$$\left.+\kappa_4^2A_4\rho_{24}e^{i\widetilde{D}_{24}t}\right\} \tag{9}$$

$$\frac{\partial D_{13}}{\partial\omega}\frac{dA_3}{dt}=-\frac{i}{2}\frac{\omega_b^2}{\Omega^2}G\left\{\kappa_1^2A_1\rho_{13}^*e^{-i\widetilde{D}_{13}t}+\kappa_2^2A_2\rho_{23}^*e^{-i\widetilde{D}_{23}t}+\right.$$
$$\left.+\kappa_4^2A_4\rho_{34}e^{i\widetilde{D}_{34}t}\right\}$$

$$\frac{\partial D_{14}}{\partial\omega}\frac{dA_4}{dt}=-\frac{i}{2}\frac{\omega_b^2}{\Omega^2}G\left\{\kappa_1^2A_1\rho_{14}^*e^{-i\widetilde{D}_{14}t}+\kappa_2^2A_2\rho_{24}^*e^{-i\widetilde{D}_{24}t}+\right.$$
$$\left.+\kappa_3^2A_3\rho_{34}^*e^{-i\widetilde{D}_{34}t}\right\}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2}=-\frac{1}{2}i\Big(\frac{\Omega_{b12}}{k_{12}}\rho_{12}e^{ik_{12}z'}+\frac{\Omega_{b13}}{k_{13}}\rho_{13}e^{ik_{13}z'}+$$
$$+\frac{\Omega_{b14}}{k_{14}}\rho_{14}e^{ik_{14}z'}+\frac{\Omega_{b23}}{k_{23}}\rho_{23}e^{ik_{23}z'}+\frac{\Omega_{b24}}{k_{24}}\rho_{24}e^{ik_{24}z'}+$$
$$+\frac{\Omega_{b34}}{k_{34}}\rho_{34}e^{ik_{34}z'}-\text{к.с.}\Big)-i\frac{1}{4}\Big(\frac{e}{m}\Big)^2\frac{\varphi_1^2}{\Omega^2}\Big(k_{12}\kappa_1^2\kappa_2^2A_1A_2^*e^{-i\widetilde{D}_{12}t+ik_{12}z'}+$$
$$+k_{13}\kappa_1^2\kappa_3^2A_1A_3^*e^{-i\widetilde{D}_{13}t+ik_{13}z'}+k_{14}\kappa_1^2\kappa_4^2A_1A_4^*e^{-i\widetilde{D}_{14}t+ik_{14}z'}+$$
$$+k_{23}\kappa_2^2\kappa_3^2A_2A_3^*e^{-i\widetilde{D}_{23}t+ik_{23}z'}+k_{24}\kappa_2^2\kappa_4^2A_2A_4^*e^{-i\widetilde{D}_{24}t+ik_{24}z'}+$$
$$+k_{34}\kappa_3^2\kappa_4^2A_3A_4^*e^{-i\widetilde{D}_{34}t+ik_{34}z'}-\text{к.с.}\Big).$$

Здесь $\widetilde{D}_{ij} = \omega_{ij} - k_{ij}u$ – расстройки, равные в силу условий (1) $\pm\Omega_b(k_{ij})$. Уравнения (9) связывают четыре амплитуды волноводных мод A_α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ с шестью амплитудами пучковых волн заряда

$$\rho_{ij} = \frac{2}{L}\int_0^L e^{-ik_{ij}z'}dz_0, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad j > i.$$

Следует подчеркнуть, что говорить о пучковых волнах имеет смысл лишь при параметрической неустойчивости в условиях простого распада. Сами же уравнения (9) являются более общими, поскольку годятся и при модифицированном распаде, когда быстрая и медленная волны пучка неразличимы.

В дальнейших работах будет проведено исследование уравнений (9) в различных приближениях. Сейчас же отметим, что если при $t = 0$ были отличны от нуля амплитуды только двух волноводных мод, то такая ситуация сохранится и далее, т.е. взаимодействие сведется к трехволновому. Это, однако, наименее интересный случай. Гораздо более оправдана иная постановка задачи: при $t = 0$ амплитуда одной из волн велика (накачка), а амплитуды трех других хотя и малы, но конечны. Временная эволюция такого начального состояния зависит от многих факторов, а ее анализ позволит выявить наиболее эффективный параметрический процесс. Кстати, сравнение инкрементов линейной теории (при фиксированной амплитуде накачки) совершенно недостаточно для решения вопроса об эффективности.

Институт общей физики АН СССР
Поступила в редакцию 21 июня 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузелев М.В., Панин В.А. Радиофизика, 27, № 4, 426 (1984).
2. Литвак А.Г., Петрухина В.И., Трахтенгерц В.Ю. Письма в ЖЭТФ, 18, № 3, 190 (1973).
3. Балакирев В.А. ЖТФ, 53, № 11, 2130 (1983).
4. Огнивенко В.В. Радиотехника и электроника, 27, № 9, 1818 (1982).