Краткие сообщения по физике № 4-1985 г.

ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТИ ЗВУКА В СМЕСИ ЛЕГКОГО И ТЯЖЕЛОГО ГАЗОВ

В.А. Алексеев, П.Г. Федоров

УДК 534.833.53

Показано, что в смеси легкого и тяжелого газов в области частот, сравнимых с обратным временем передачи импульса от легких молекул тяжелым, может возникать значительная дисперсия скорости звука, сопровождающаяся сильным поглощением.

Скорость и затухание звуковой волны в газовой смеси, состоящей из легких и тяжелых молекул (молекулярные массы и концентрации m_1, N_1 и m_2, N_2, причем $m_1 \ll m_2$, $N_2 \ll N_1$, но $m_1 N_1 \lesssim m_2 N_2$), должны обладать специфической зависимостью от частоты, связанной с затрудненностью передачи энергии и импульса от легких молекул к тяжелым.

При малых частотах легкий и тяжелый газы успевают за период колебания обмениваться импульсом и энергией, поэтому скорость звука $v_0 = (5/3)^{1/2}(T/\mu)^{1/2}$, где T – температура, $\mu = (N_1 m_1 + N_2 m_2)/(N_1 + N_2)$. При больших частотах температура и плотность тяжелого газа не успевают следить за быстрым изменением соответствующих параметров легкого, в результате чего скорость звука оказывается равной $v_\infty = (5/3)^{1/2}(T/m_1)^{1/2}$. В общем случае v_∞ может превышать v_0 в несколько раз, т.е. дисперсия скорости звука может быть большой. Оказывается, что в переходной области частот затухание звука столь велико, что фактически вообще нельзя говорить о существовании звуковой волны. Описать это явление развитым Мандельштамом и Леонтовичем методом введения релаксирующего параметра /1/ не удается.

Для описания звуковой волны в смеси газов представим, как обычно /2/, функции распределения легких и тяжелых молекул соответственно в виде

$$f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = N_1 \varphi(v)\,[1 + \chi_1(\vec{r}, \vec{v}, t)],$$

$$f_2(\vec{R}, \vec{V}, t) = N_2 \varphi(V)\,[1 + \chi_2(\vec{R}, \vec{V}, t)],$$

где $\varphi(v)$ – максвелловская функция распределения. Линеаризованные уравнения для пространственно-временных фурье-компонент $\chi_{\vec{q}\,\omega}(\vec{v}) = \psi(\vec{v})$

имеют вид:

$$- i\omega\vec{\psi}(\vec{v}) + \hat{A}\vec{\psi}(\vec{v}) + \hat{K}\vec{\psi}(\vec{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\psi}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{v}) \\ \psi_2(\vec{V}) \end{pmatrix}, \quad \hat{A}\vec{\psi}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} iqv_x\psi_1(\vec{v}) \\ iqV_x\psi_2(\vec{V}) \end{pmatrix},$$

$$\hat{K}\vec{\psi}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} N_1\hat{K}_\alpha\psi_1(\vec{v}) + N_2\hat{K}_\beta\psi_1(\vec{v}) \\ N_2\hat{K}_\gamma\psi_2(\vec{V}) + N_1K_\delta\psi_2(\vec{V}) \end{pmatrix},$$

причем ось x направлена вдоль вектора $\vec{q}$. Член столкновений имеет вид:

$$\hat{K}_\beta\psi_1(\vec{v}) = \int W_{12}(\vec{v}, \vec{V}, \vec{v}\,', \vec{V}\,')\varphi(v)\,[\psi_1(\vec{v}) + \psi_2(\vec{V}) - \psi_1(\vec{v}\,') -$$
$$- \psi_2(\vec{V}\,')]\,d\vec{v}\,'d\vec{V}\,d\vec{V}\,', \tag{2}$$

где N_2W_{12} – число переходов $\vec{v}\vec{V} - \vec{v}\,'\vec{V}\,'$ в единицу времени при столкновении частиц 1 и 2. Результат действия оператора $\hat{K}_\alpha$ получается из (2) заменой $2 \to 1$, $\vec{V} \to \vec{v}$, $\hat{K}_\gamma$-заменой $1 \to 2$, $\vec{v} \to \vec{V}$; $\hat{K}_\delta$-заменой $2 \leftrightarrow 1$, $\vec{v} \leftrightarrow \vec{V}$.

Решение уравнений (1) дает зависимость q от ω, т.е. позволяет (в отсутствие затухания) найти скорость звука $v_s = \omega/q$ как функцию частоты. Для нахождения такого решения заметим следующее. При определении скалярного произведения формулой

$$(\vec{\psi}, \vec{g}) = (N_1/N)\int \psi_1 g_1 \varphi(v)\,d\vec{v} + (N_2/N)\int \psi_2 g_2 \varphi(V)\,d\vec{V}, \quad N = N_1 + N_2$$

оператор $\hat{K}$ оказывается эрмитовым. В однокомпонентной среде ($N_2 = 0$) при описании звуковой волны основную роль играют функции

$$\Phi_1 = 1; \quad \Phi_2 = mv_x/\sqrt{mT}; \quad \Phi_3 = \sqrt{2/3}\,(mv^2/2T - 3/4),$$

отражающие законы сохранения числа частиц, импульса и энергии и обращающие интеграл столкновений в нуль, т.е. соответствующие собственному значению оператора $\hat{K}$ равному нулю /3, 4/. Остальные собственные значения имеют порядок величины $Nv\sigma$, где σ – газокинетическое сечение упругого рассеяния, и в гидродинамическом пределе $Nv\sigma \gg qv$. Аналогично, в рассматриваемом случае двухкомпонентной среды в гидродинамическом пределе $N_1 v\sigma \gg qv$, главную роль играют векторные функции

$$\vec{\Phi}_1 = \sqrt{\frac{N}{N_1}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Phi}_2 = \sqrt{\frac{N}{N_1 m_1 T}}\begin{pmatrix} m_1 v_x \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{\Phi}_3 = \sqrt{\frac{2N}{3N_1}}\ (m_1 v^2/2T - 3/4);$$

$$\vec{\Phi}_4 = \sqrt{\frac{N}{N_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Phi}_5 = \sqrt{\frac{N}{N_2 m_2 T}} \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 V_x \end{pmatrix}; \qquad (3)$$

$$\vec{\Phi}_6 = \sqrt{\frac{2N}{3N_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 V^2/2T - 3/4 \end{pmatrix}.$$

Результат действия операторов $\hat{K}_\alpha$ и $\hat{K}_\gamma$ на эти функции равен нулю, тогда как результат действия $N_2 \hat{K}_\beta$ оказывается малым из-за $N_2 \ll N_1$, а результат действия $N_1 \hat{K}_\delta$ мал из-за слабого изменения скорости тяжелых частиц при столкновениях с легкими. Поскольку результат действия операторов $\hat{K}_\beta$ и $\hat{K}_\delta$ на функции $\vec{F}_1 = \sqrt{\frac{N_1 m_1}{N\mu}}\ \vec{\Phi}_2 + \sqrt{\frac{N_2 m_2}{N\mu}}\ \vec{\Phi}_5$; $\vec{F}_2 = \sqrt{\frac{N_1}{N}}\ \vec{\Phi}_3 + \sqrt{\frac{N_2}{N}}\ \vec{\Phi}_6$ равен нулю из-за точного выполнения законов сохранения, получаем, что в базисе (3) отличны от нуля лишь следующие матричные элементы оператора $\hat{K}$:

$$K_{22} = G_{22},\ \ K_{33} = G_{33},\ \ K_{55} = a^2 G_{22},\ \ K_{66} = b^2 G_{33},\ \ K_{25} = -aG_{22},$$

$$K_{36} = -bG_{33}, \text{ где } a^2 = (N_1 m_1/N_2 m_2);\quad b^2 = N_1/N_2;$$

$$G_{22} = (N_2 m_1/T) \int W_{12}(\vec{v}, \vec{V}, \vec{v}\,', \vec{V}\,') v_x (v_x - v_x') \varphi(v) \varphi(V)\, d\vec{v}\, d\vec{v}\,' d\vec{V}\, d\vec{V}\,' \approx$$
$$\approx (1/3) N_2 v \sigma_{tr};$$

$$G_{33} = (N_2/6T^2) \int W_{12}(\vec{v}, \vec{V}, \vec{v}\,', \vec{V}\,') (m_1 v^2 - \frac{3}{2} T)(m_1 v^2 - m_1 v'^2) \times$$
$$\times \varphi(v)\varphi(V) d\vec{v}\, d\vec{v}\,' d\vec{V}\, d\vec{V}\,';$$

σ_{tr} — транспортное сечение рассеяния легких частиц на тяжелых, причем $G_{33} \sim N_2 v \sigma_{tr} (m_1/m_2)$. Секулярное уравнение для нахождения собственных значений $i\omega$ оператора $\hat{A} + \hat{K}$ принимает вид:

$$\omega^6 + i\omega^5 [G_{22}\ (1 + a^2) + G_{33}(1 + b^2)] - \omega^4 [(qv_\infty)^2 + G_{22} G_{33} (1 + a^2) \times$$

$$\times\ (1+b^2)] - i\omega^3\ \frac{3}{5}\ (qv_\infty)^2[\frac{5}{3}\ a^2G_{22} + \frac{5}{3}b^2G_{33} + G_{33}] +$$
$$+\ \omega^2\ \frac{3}{5}\ (qv_\infty)^2G_{22}G_{33}a^2\ (\frac{5}{3}\ b^2 + 1) = 0, \tag{4}$$

где для упрощения положено $(T/m_2)^{1/2} = 0$. Это уравнение задает связь между волновым вектором q звуковой волны и частотой ω. Если ввести обозначения $G_{22}\,(1 + a^2) = \tau_1^{-1}$, $G_{33}\,(1 + b^2) = \tau_2^{-1}$, где τ_1 и τ_2 можно соответственно назвать временами передачи импульса и энергии от легкого газа тяжелому, то (4) совпадает с уравнением, получающимся из /1/ для случая двух релаксирующих параметров (см. также /5/).

В низкочастотном пределе $\omega \ll N_1 v\sigma_{tr}(m_1/m_2)$ из (4) получаем

$$q = q' + iq'' = \frac{\omega}{v_0} + i\ \frac{\omega^2}{2G_{22}v_0^3}\ \frac{(v_\infty^2 - v_0^2)^2}{v_\infty^2}\ . \tag{5}$$

В высокочастотном пределе $\omega \gg N_1 v\sigma_{tr}(m_1/m_2)$ аналогично находим

$$q = \frac{\omega}{v_\infty} + i\left(\frac{G_{22}}{2v_\infty} + \frac{G_{33}}{5v_\infty}\right). \tag{6}$$

В промежуточной области частот $\omega \sim N_1 v\sigma_{tr}(m_1/m_2)$ затухание звука становится большим, так что при $v_\infty - v_0 \sim v_\infty$ звук затухает на расстоянии порядка длины волны.

П р и м е р. В смеси газов H_2 и Xe с концентрациями $N_1(H_2) = 3 \times 10^{19}$ см$^{-3}$, $N_2(Xe) = 10^{18}$ см$^{-3}$ получаем $v_\infty/v_0 = \sqrt{3}$. Полагая $v_{H_2} \sim 10^5$ см/с и $\sigma_{tr} = 10^{-15}$ см^2, находим, что скорость звука испытывает дисперсию в области частот $\omega \sim 10^8$ с$^{-1}$. Поглощение звука достигает максимума при $\omega \approx 1{,}7N_1 v\sigma_{tr}(m_1/m_2) = 8\cdot 10^7$ с$^{-1}$ и равно $q''/q' = 1/3$.

Учет внутренней структуры тяжелых частиц приводит к следующим изменениям:

$$G_{33} = \frac{2}{3T^2}\ \sum_{ij} N_{2i} \int W_{12}\,(\vec{v}\,\vec{V}i;\ \vec{v}'\,\vec{V}'j)\,(\frac{m_1v^2}{2} - \frac{3}{4}\ T)\left[\frac{m_1v^2}{2} - \frac{m_1v'^2}{2}\right]\varphi(v)\varphi(V)\,d\vec{v}\,d\vec{v}'d\vec{V}\,d\vec{V}' \sim \frac{2}{3T^2}\sum_{ij} N_{2i}\int W_{12}\,(\vec{v}\,\vec{V}i;\ \vec{v}'\,\vec{V}'j) \times$$
$$\times\ (\frac{m_1v^2}{2} - \frac{3}{4}T)\,(E_i - E_j)\varphi(v)\varphi(V)\,d\vec{v}\,d\vec{v}'d\vec{V}\,d\vec{V}' \sim \frac{\Delta E}{T}\,N_2 v\sigma,$$

где индексы i, j нумеруют уровни энергии тяжелой частицы, а ΔE – среднее изменение ее внутренней энергии при одном столкновении; $b^2 = (N_1/N_2) \times \times (3/2c_v)$, где c_v – теплоемкость тяжелой частицы. Остальные введенные выше параметры остаются прежними. При этом в низкочастотном пределе скорость звука принимает обычное значение $v_0 = (T/\mu)^{1/2}(C_p/C_V)^{1/2}$, где C_p и C_V – теплоемкости на единицу объема, тогда как в высокочастотном пределе снова получаем выражение (6).

Авторы благодарны Ю.В. Афанасьеву за обсуждение результатов.

Поступила в редакцию 10 декабря 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л.И., Леонтович М.А. ЖЭТФ, 7, 438, 1937.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика, М., Наука, 1979, с. 32.
3. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика, т. 2. М., Мир, 1978, гл. 13.
4. Резибуа П., Де Ленер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М., Мир, 1980, с. 130.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц М.А. Механика сплошных сред. М., ГИФМЛ, 1954, с. 381.