

ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА В СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ

Б.М. Болотовский, Е.Ю. Жеманова

УДК 535.1 + 535.225

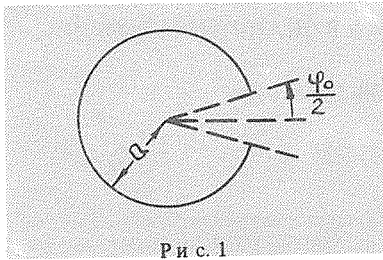
В приближении скалярного поля рассмотрена задача об излучении вращающегося источника. Найдено выражение для поля источника, вращающегося с заданной угловой скоростью. Определена асимптотика решения. Проведено качественное рассмотрение "зайчика" – возбуждения на удаленном экране.

При решении задачи о поле вращающегося источника рассматривается такой источник направленного света, световой пучок которого перпендикулярен некоторой оси. Пусть этот источник вращается вокруг указанной оси с угловой скоростью Ω . Кроме того, имеется соосный цилиндрический экран радиуса R . Очевидно, что световое пятно ("зайчик") от источника будет двигаться по этому экрану с линейной скоростью $v = \Omega R$, и при достаточно больших значениях R может превышать скорость света. В этом утверждении нет противоречия с теорией относительности, так как скорость "зайчика" не есть скорость передачи энергии /1, 2/.

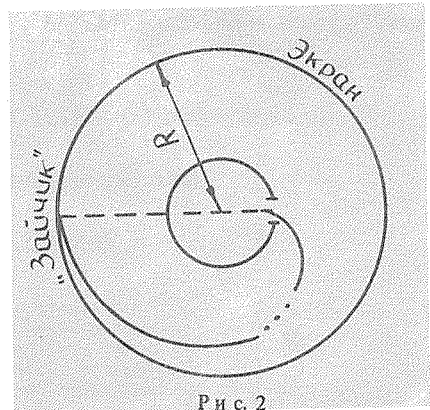
Представляет интерес выяснение некоторых особенностей рассматриваемого явления на достаточно простом в математическом отношении примере, когда поле описывается одной функцией, удовлетворяющей волновому уравнению. Электромагнитное поле не является скалярным, но скалярная задача помогает в ряде случаев судить о качественных особенностях распространения электромагнитных волн и полезна, например, при рассмотрении явлений, связанных с дифракцией /3/. Кроме того, скалярное волновое уравнение применимо для описания акустических волн в газе.

Рассмотрим линейный источник, расположенный на оси OZ и создающий волновое поле частоты ω . Пусть этот источник заключен в цилиндрический экран радиуса a так, что ось цилиндра совпадает с осью OZ . Прорежем на поверхности цилиндра щель с угловым размером φ_0 (рис. 1). Тогда в первом приближении амплитуда поля на поверхности экрана имеет вид:

$$u = \begin{cases} B \exp(-i\omega t), & \Omega t - \varphi_0/2 < \varphi < \Omega t + \varphi_0/2, \\ 0 & \text{(для всех остальных углов)}. \end{cases} \quad (1)$$



Р и с. 1



Р и с. 2

Разложив поле в ряд Фурье по φ , получим

$$u(r = a, \varphi, t) = \frac{B}{\pi} \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\varphi_0}{2}\right) \exp[i n(\varphi - \Omega t)]. \quad (2)$$

Найдем теперь поле, созданное таким источником вне цилиндра. Для этого необходимо решение волнового уравнения, которое содержало бы только расходящиеся волны, а на поверхности цилиндра принимало бы вид (1), (2). Таким решением является выражение

$$u = \frac{B}{\pi} \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\varphi_0}{2}\right) \frac{H_n^{(1)}(k_n r)}{H_n^{(1)}(k_n a)} \exp[i n(\varphi - \Omega t)], \quad (3)$$

где r — расстояние до точки наблюдения; $H_n^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода; $k_n = (1/c)|\omega + n\Omega|$ — волновой вектор гармоники с номером n .

Рассмотрим выражение (3) для поля в случае, когда радиус наблюдения R велик по сравнению со всеми существенными длинами волн. То же самое предположим относительно радиуса a вращающейся поверхности. Используя асимптотику функций Ганкеля [4], после некоторых преобразований получим

$$u = \frac{B}{\pi} \exp(-i\omega t) \sqrt{\frac{a}{R}} \exp\left[i \frac{\omega}{c} (R - a)\right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\varphi_0}{2}\right) \times \\ \times \exp\left\{i n \left[\varphi + \frac{\Omega}{c} (R - a) - \Omega t\right]\right\}.$$

Сравнение этой функции с распределением (2) поля на вращающемся экране радиуса a показывает, что

$$u = \sqrt{\frac{a}{R}} \exp [i(\omega/c) (R - a)] u(r = a, \varphi + (\Omega/c) (R - a), t),$$

где $u(r = a, \varphi + (\Omega/c) (R - a), t)$ — значение функции u , заданное на поверхности цилиндра радиуса a и смещенное по φ на величину $(\Omega/c) (R - a)$.

Таким образом (с точностью до множителя), распределение поля на удаленном экране оказывается таким же, как и на вращающемся цилиндре радиуса a , но сдвинутым по углу φ против направления вращения на величину $\Delta\varphi = (\Omega/c) (R - a)$. В частности, если, например, $(\Omega/c) (R - a) = \pi$, то "зайчик" на экране радиуса R располагается там, куда никак бы не мог попасть, если бы лучи распространялись прямолинейно, а именно, "зайчик" находится в области, азимут которой составляет угол 180° с центром щели. Эта ситуация изображена на рис. 2.

Следует отметить, что и в том случае, когда на поверхности экрана радиуса a поле задано не в специальном виде (1), а в виде произвольной функции угла, форма распределения поля на удаленном экране радиуса R приблизительно повторяет распределение поля на экране радиуса a .

Учет следующих членов асимптотического разложения приводит к тому, что распределение поля на экране радиуса R уже не совпадает с распределением поля на вращающемся экране радиуса a . В частности, если распределение поля на экране радиуса a имеет вид "стола" с угловой шириной φ_0 (1), то распределение поля на удаленном экране сглаживается вблизи от краев на угловом интервале $\Delta\varphi \sim \pi/\sqrt{2k_n a}$. По своей физической природе это сглаживание связано с эффектом дифракции на вращающейся щели.

Поступила в редакцию 14 января 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г и н з б у р г В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., Наука, 1981.
2. Б о л о т о в с к и й Б.М., Г и н з б у р г В.Л. В кн. Эйнштейновский сборник 1972. М., Наука, 1974, с. 212.
3. Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М. Теория поля. М., Наука, 1967.
4. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-ое, М., Физматгиз, 1963.