Краткие сообщения по физике № 3-1985 г.

РАСПАД НАЧАЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В ДИНАМИКЕ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

А.В. Гуревич, Я.Н. Истомин, А.П. Мещеркин

УДК 533.9.01

Решена задача распада начальных разрывов в гидродинамике замагниченной плазмы. Показано, что в момент опрокидывания солитона возникает особенность плотности тока.

Рассмотрим нелинейные гидродинамические движения разреженной плазмы в магнитное поле, когда диссипативные процессы слабы в сравнении с дисперсионными эффектами. Пусть напряженность магнитного поля достаточно велика, так что выполняются неравенства: $v_A/c \ll 1$; $v_T/v_A \ll 1$, где $v_A = (B^2/4\pi n)^{1/2}$ — альфвеновская скорость; v_T — тепловая скорость частиц плазмы; c — скорость света. Введя характерные значения плотности n_0 и магнитного поля B_0, в безразмерных переменных

$$
\begin{gathered}
n' = n/n_0, \ \vec{B}' = \vec{B}/B_0, \ \vec{v}'_{i,e} = \vec{v}_{i,e}/v_A, \ \vec{r}' = (\omega_{po}/c)\vec{r}, \\
t' = (v_{Ao}\omega_{po}/c)\,t, \ \vec{E}' = (c/v_{Ao}B_o)\vec{E}, \ \vec{j}' = (4\pi/\omega_{po}B_o)\vec{j}, \qquad (1) \\
v_{Ao}^2 = B_0^2/4\pi n_0(m_i + m_e), \ \omega_{po}^2 = 4\pi n_0 e^2(m_i + m_e)/m_i m_e,
\end{gathered}
$$

получаем уравнения магнитной гидродинамики холодной бездиссипативной плазмы:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}n) = 0, \\
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + \left(\frac{\vec{j}}{n}\nabla\right)\frac{\vec{j}}{n} = \frac{1}{n}[\vec{j},\vec{B}], \qquad (2) \\
\vec{E} = -[\vec{u},\vec{B}] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{j}}{n}\right) + (\vec{u}\nabla)\frac{\vec{j}}{n} + \left(\frac{\vec{j}}{n}\nabla\right)\vec{u} + q\left\{\left[\frac{\vec{j}}{n},\vec{B}\right] - \right. \\
\left. - \left(\frac{\vec{j}}{n}\nabla\right)\frac{\vec{j}}{n}\right\},
\end{gathered}
$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{j},\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\,\vec{E}, \tag{2}$$

где $q = (m_i - m_e)/(m_i m_e)^{1/2} \approx (m_i m_e)^{1/2}$ — холловский параметр.

Рассмотрим одномерное движение плазмы поперек магнитного поля $\vec{B}$. Все величины зависят от одной координаты x; ось z направим вдоль поля $\vec{B}$. Тогда $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $\vec{u} = u\vec{e}_x$, $\vec{j} = j\vec{e}_y$, $\vec{E} = q(j/n)B\vec{e}_x + E\vec{e}_y$ и систему уравнений (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(un) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = jB/n,$$

$$E = uB + \frac{\partial}{\partial t}\,j/n + u\frac{\partial}{\partial x}\,j/n, \tag{3}$$

$$\partial B/\partial x = -\,j,$$

$$\partial B/\partial t = -\,\partial E/\partial x.$$

Из последних трех уравнений системы (3) находим интеграл движения /1/

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{j}{n} + B\right)\right] = 0,\quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4}$$

В задаче о натекании плазмы из области $x \to -\infty$, где $n = B = 1$, интеграл (4) означает, что $(\partial/\partial x)(j/n) = n - B$. Благодаря этому уравнения магнитной гидродинамики для течений поперек магнитного поля упрощаются и приобретают вид обычных уравнений дисперсионной гидродинамики /2/:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(un) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{n}\,B\,\frac{\partial B}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n}\,\frac{\partial B}{\partial x}\right) = B - n.$$

Дисперсия определяется левой частью последнего уравнения; характерный масштаб дисперсии в (5) порядка единицы, что соответствует в размерных переменных (1) длине c/ω_{po}.

Рассмотрим теперь нелинейные движения замагниченной плазмы, соответствующие распаду произвольных начальных разрывов /3/. Начальные условия для уравнений (5) при $t = 0$ имеют вид:

$$n = B = 1, \; u = 0 \text{ при } x < 0, \qquad (6)$$
$$n = B = n_1, \; u = u_1 \text{ при } x > 0.$$

Здесь нормированное значение плотности n_0 в (1) соответствует величине n при $x < 0$.

В пренебрежении пространственной дисперсией $n = B$. Уравнения (5) принимают вид уравнений эйлеровской гидродинамики с показателем адиабаты $\gamma = 2$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0, \qquad (7)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

Асимптотические решения уравнений дисперсионной гидродинамики (5) с начальными условиями (6), согласно /2/, могут быть построены из автомодельного решения эйлеровских уравнений (7)

$$n_a(\tau) = \frac{1}{9}(2-\tau)^2, \quad u_a(\tau) = \frac{2}{3}(\tau+1), \qquad (8)$$

где $\tau = x/t$, решения вида плато $n = n_2$, $u = u_2$ и расширяющегося автомодельного разрыва. Условие перехода через автомодельный разрыв в нашем случае (7) для распада произвольного начального разрыва (6) принимает вид:

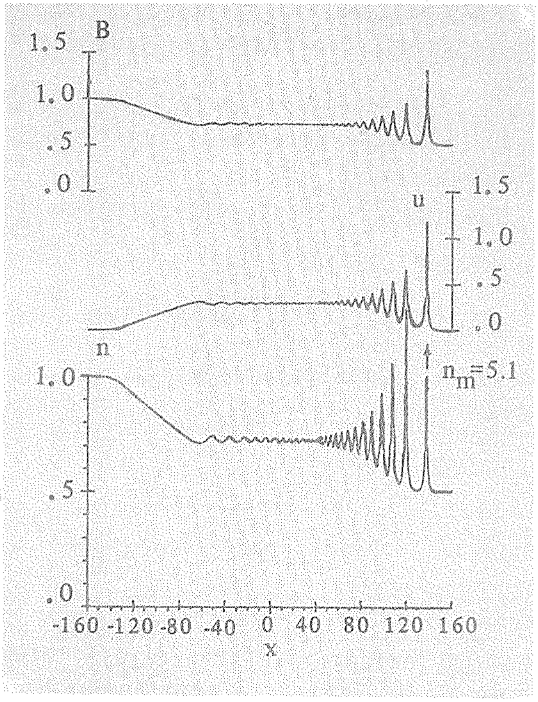
$$u(\tau_+) - u(\tau_-) = 2(\sqrt{n(\tau_+)} - \sqrt{n(\tau_-)}). \qquad (9)$$

Тогда получаем следующие значения n и u на плато:

$$n_2 = \frac{1}{4}\left[(1+\sqrt{n_1}) - \frac{1}{2}u_1\right]^2, \; u_2 = 1 + \frac{1}{2}u_1 - \sqrt{n_1}. \qquad (10)$$

В частности, в случае покоящегося начального разрыва ($u_1 = 0$) имеем

$$n_2 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{n_1})^2; \quad u_2 = 1 - \sqrt{n_1}. \qquad (11)$$



Р и с. 1. Распределение концентрации n, скорости u и магнитного поля B при втекании плазмы в плазму ($n_1 = 0{,}5$, $n_0 = 1$, $u_1 = u_0 = 0$) в момент времени $t = 140$. Значение амплитуды головного солитона n_m указано условно.

Пример численного решения уравнений (5) для $n_1 = 0{,}5$, $u_1 = 0$ показан на рис. 1. Средние значения на плато $\bar{n} = 0{,}728$ и $\bar{u} = 0{,}293$ в точности совпадают с величинами, определяемыми формулами (11). Структура решения в области автомодельного разрыва – бездиссипативной ударной волны – аналогична исследованной в /2/.

Отметим, что решение (8) – (10) справедливо, если нет опрокидывания головного солитона. Условие опрокидывания следует из анализа солитонных решений уравнений (5), зависящих лишь от $|\xi| = |x - u_s t|$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$B \to 1,\ u \to 0,\ n \to 1 \text{ при } |\xi| \to \infty. \tag{12}$$

Такое решение имеет вид

$$\xi = \int\limits_{B_m}^{B} \frac{\sqrt{2}(B^2 - 2u_s^2 - 1)\,dB}{(B-1)\,(4u_s^2 - (B+1)^2)^{1/2}}, \tag{13}$$

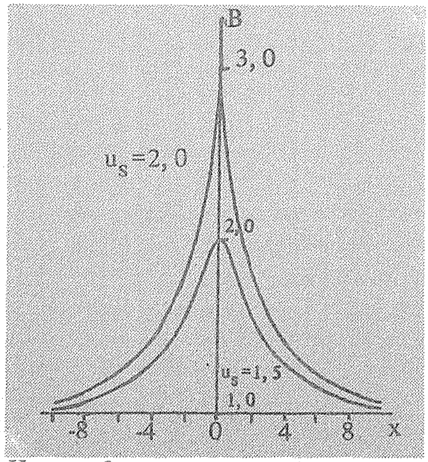
$$u = (B^2 - 1)/2u_s,\ n = 2u_s^2/(2u_s^2 + 1 - B^2).$$

Максимальное значение B_m однозначно связано со скоростью солитона $B_m = 2u_s - 1$, а условие опрокидывания имеет вид:

$$B_{mc} = 3,\ u_{sc} = 2,\ n_m \to \infty. \tag{14}$$

Важной особенностью солитона (13) при условиях (14) является обращение в бесконечность производной $(dB/d\xi)_{\xi=0}$. Это означает, что плотность тока j в этой точке также обращается в бесконечность. Решения (13) при условии $|\xi| \ll 1$ имеют вид:

$$B(\xi) = 3 - \xi^{2/3};\ u(\xi) = 2 - 1{,}5\xi^{2/3};\ n(\xi) = (4/3)\,\xi^{-2/3};\ j(\xi) = -(2/3)\,\xi^{-1/3}$$



Р и с. 2. Распределение магнитного поля B в солитоне в зависимости от координаты x при $u_s = u_{sc} = 2{,}0$ и $u_s = 1{,}5$.

На рис. 2 приведены графики зависимости (13) в случаях $u_s = u_{sc}$ и $u_s \neq u_{sc}$. Для головного солитона, распространяющегося вправо при распаде начального разрыва (6), граничные условия вместо (12) следует записывать в виде: $B \to B_1$, $u \to u_1$, $n \to B_1$ при $|\xi| \to \infty$. Тогда условие его опрокидывания приобретает вид: $B_{mc} = 3B_1$, $u_{sc} = u_1 + 2B_1^{1/2}$, $n_m \to \infty$.

В случае покоящегося начального разрыва опрокидывание достигается при $(n_1/n_0)_c \approx 0{,}32$. При этом $(n_2/n_1)_c \approx 2{,}4$. Из (10) следует, что опрокидывание не возникает при распаде начальных разрывов, если $u_1 > 2 - 3{,}54/\sqrt{n_1}$.

Поступила в редакцию 3 января 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. W h i t h o m G.B. Proc, Roy. Soc., A283, 238 (1965).
2. Г у р е в и ч А.В., М е щ е р к и н А.П. ЖЭТФ, 87, 1277 (1984).
3. Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.