Краткие сообщения по физике № 4-1984 г.

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ И УПЛОТНЕНИЯ В ПЛАЗМЕ С ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

О.Н. Крохин, С.П. Цыбенко

УДК 533.9

Получено аналитическое решение, описывающее слабые стационарные волны разрежения и уплотнения в бесстолкновительной плазме. Амплитуда, скорость и тип волны (разрежение или уплотнение) определяются параметрами невозмущенной плазмы.

В плазме с двумя электронными компонентами, каждая из которых описывается равновесной функцией распределения с температурой T_j ($j = 1,2$), возмущения ионной плотности n и скорости v (одномерный случай) определяются системой уравнений

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{e}{M_i}\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi e[n - n_{10}\exp(e\phi/T_1) - n_{20}\exp(e\phi/T_2)]. \tag{1}$$

Здесь ϕ — потенциал волны, M_i — масса иона, n_{10}, n_{20} — невозмущенные плотности электронных компонент. Электронные температуры T_1 и T_2 будем считать постоянными и достаточно большими, чтобы температурой ионов можно было пренебречь. Через температуру

$$T_{ef} = (a_1/T_1 + a_2/T_2)^{-1}, \text{ где } a_1 = n_{10}/n_0, \ a_2 = n_{20}/n_0,$$

$n_0 = n_{10} + n_{20}$ — невозмущенная плотность, определим выражения для $\lambda_d = (T_{ef}/4\pi e^2 n_0)^{1/2}$ и скорости звука $v_s = (T_{ef}/M_i)^{1/2}$.

В системе (1) перейдем к безразмерным переменным $n' = n/n_0$, $\Phi = e\phi/T_{ef}$, $v' = v/v_s$, $t' = \omega_{pi}t$, $x' = x/\lambda_d$. Для стационарной волны, распространяющейся против оси x', все величины зависят от x' и t' только в комбинации $\xi = x' + Mt'$, где M — скорость распространения волны. При $\xi \to -\infty$ имеем невозмущенную плазму, т.е. $\Phi = 0$, $v' = 0$, $n' = 1$, $d\Phi/d\xi = 0$. Используя эти граничные условия и проинтегрировав систему (1), получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2 + M^2\left[1 - \left(1 - \frac{2\Phi}{M^2}\right)^{1/2}\right] + \frac{a_1 T_1}{T_{ef}}\left[1 - \exp\left(\frac{T_{ef}}{T_1}\Phi\right)\right] + \tag{2}$$
$$+ \frac{a_2 T_2}{T_{ef}}\left[1 - \exp\left(\frac{T_{ef}}{T_2}\Phi\right)\right] = 0.$$

К уравнению (2) добавим граничные условия на другом конце — за фронтом волны при $\xi \to +\infty$,

$$M(M^2 - 2\Phi_m)^{1/2} - a_1 \exp\left(\frac{T_{ef}}{T_1}\Phi_m\right) - a_2 \exp\left(\frac{T_{ef}}{T_2}\Phi_m\right) = 0, \tag{3}$$

$$M^2\left[1 - \left(1 - \frac{2\Phi_m}{M^2}\right)\right] + \frac{a_1 T_1}{T_{ef}}\left[1 - \exp\left(\frac{T_{ef}}{T_1}\Phi_m\right)\right] + \frac{a_2 T_2}{T_{ef}}\left[1 - \right. \tag{4}$$
$$\left. - \exp\left(\frac{T_{ef}}{T_2}\Phi_m\right)\right] = 0.$$

Уравнение (3) — условие квазинейтральности, а уравнение (4) означает отсутствие поля $d\Phi/d\xi$ при $\xi \to +\infty$. Уравнения (3), (4) определяют скорость M и амплитуду Φ_m волны. Для слабых волн $\Phi \ll 1$, ограничиваясь первыми тремя членами в разложении по Φ, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2 + A\Phi^2 + B\Phi^3 + C\Phi^4 \cong 0,$$
$$A + B\Phi_m + C\Phi_m^2 \cong 0, \tag{5}$$
$$2A + 3B\Phi_m + 4C\Phi_m^2 \cong 0,$$

где $A \cong -(1/2!)(M^2 - 1)$, $B \cong (1/3!)(3 - \Delta)$, $C \cong (1/4!)(15 - T_{ef}^3/T_a^3)$,

$$\Delta = (a_1/T_1^2 + a_2/T_2^2)T_{ef}^2, \quad T_a^3 = (a_1/T_1^3 + a_2/T_2^3)^{-1}.$$

Выражая с помощью двух последних уравнений C через A и B, первое уравнение системы (5) перепишем в виде

$$\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2 - (M^2-1)\Phi^2\left[1+\frac{(\Delta-3)}{6(M^2-1)}\Phi\right]^2 = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) выразим через производную $(\partial^2 P/\partial V^2)_{T_1,T_2}$, которая определяет динамику слабонеоднородной разреженной плазмы /1,2/, подобно тому как производная $(\partial^2 P_g/\partial V_g^2)_S$ – динамику обычного газа /3/. Здесь $P = n_1 T_1 + n_2 T_2$ – давление электронов, $V = \rho^{-1} = [M_i(n_1 + n_2)]^{-1}$ – удельный объем, P_g, V_g, S – давление, удельный объем и энтропия нейтрального газа.

Окончательно для решения уравнения (6) имеем

$$e\phi/T_{ef} = \rho_0[(\partial^2 P/\partial V^2)_0/(\partial^3 P/\partial V^3)_0][1 + \mathrm{th}((M^2-1)^{1/2}\xi/2)], \tag{7}$$

$$M^2 - 1 = (1/3)(\rho_0 v_s)^{-2}(\partial^2 P/\partial V^2)_0^2/(\partial^3 P/\partial V^3)_0,$$

где $(\partial^2 P/\partial V^2)_0 = \rho_0^3 v_s^2(3-\Delta)$, $(\partial^3 P/\partial V^3)_0 = \rho_0^4 v_s^2(T_{ef}^3/T_a^3 - 15)$. Индекс "$_0$" обозначает производные, вычисленные в невозмущенном состоянии. Из решения (7) видно, что если $(\partial^2 P/\partial V^2)_0 < 0$, то существует волна разрежения, для $(\partial^2 P/\partial V^2)_0 > 0$ имеем стационарную волну уплотнения.

Найденное решение для стационарных волн уплотнения и разрежения существует в области $(\partial^3 P/\partial V^3)_0 > 0$ вблизи корня уравнения $(\partial^2 P/\partial V^2)_0 = 0$; если уравнение имеет два корня, то решение (7) существует вблизи большего из корней. В области меньшего корня $(\partial^3 P/\partial V^3)_0 < 0$ существуют солитоны уплотнения и разрежения /2,4/. Полученное решение (7) не содержит осцилляций как в решении для распада слабого разрыва /5/; оно более похоже на слабую волну уплотнения в нейтральном газе /3/, хотя физические процессы в последней иные.

Поступила в редакцию 23 ноября 1983 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Bezzerides, D.W. Forslund, E.L. Lindman, Phys. Fluids, 21, 2179 (1978).
2. О.Н. Крохин, С.П. Цыбенко, Физика плазмы, 9, 747 (1983).
3. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Физматгиз, М., 1966 г., гл. 1.
4. О.Н. Крохин, С.П. Цыбенко, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 5, 31 (1981).
5. А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 10, с. 3, Атомиздат, М., 1980 г.