УДК 530.145

ИНВАРИАНТЫ И ПРОПАГАТОР ПЕРЕВЕРНУТОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В. И. Манько, Е. А. Мухин

На примере осциллятора с отталкиванием рассмотрена новая формулировка квантовой механики, в которой состояние системы определяется классической функцией распределения координаты. Найдена взаимосвязь между классическим и квантовым пропагаторами системы.

В [1 – 4] предложена формулировка квантовой механики, в которой состояние задается распределением вероятности координаты, измеряемой в ансамбле повернутых систем отсчета в фазовом пространстве систем, и однозначно определяющим матрицу плотности состояния.

Примеры свободного движения, гармонического осциллятора и осциллятора с трением в новой формулировке квантовой механики рассмотрены в [5 – 7]. Системы с непрерывным спектром энергии обладают определенной спецификой для новой формулировки квантовой механики. Такой системой является осциллятор с отталкиванием (перевернутый осциллятор). Цель работы – исследовать интегралы движения и классический пропагатор данной системы и связать его с обычным пропагатором для матрицы плотности, следуя [8, 9].

Интегралы движения и когерентные состояния осцилляторов с отталкиванием. Гамильтониан осциллятора с отталкиванием имеет следующий вид:

$$\hat{H} = (\hat{p}^2 - \hat{q}^2)/2. \tag{1}$$

Для того, чтобы найти когерентные состояния осциллятора с отталкиванием, воспользуемся результатами, полученными в [10] для параметрически возбуждаемого осциллятора. Гамильтониан параметрически возбуждаемого осциллятора имеет вид

$$\hat{H} = \hat{p}^2/2 + \omega^2(t)\hat{q}^2/2. \tag{2}$$

Если в (2) для частоты принять $\omega^2(t) = -1$, то получаем (1). В случае гармонического осциллятора любой интеграл движения может быть выражен как функция двух операторов $\hat{A}(t) = \hat{U}\hat{a}\hat{U}^+$ и $\hat{A}^+(t) = \hat{U}\hat{a}^+\hat{U}^+$ с начальными условиями $\hat{A}(0) = \hat{a}$ и $\hat{A}^+(0) = \hat{a}^+$, где $\hat{U}$ – оператор эволюции уравнения Шредингера, а $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ – соответственно операторы уничтожения и рождения фотона. Операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{A}^+(t)$ удовлетворяют тому же коммуникационному соотношению, что и операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$: $[\hat{A}(t), \hat{A}^+(t)] = \hat{1}$.

Зная гамильтониан системы, ее интегралы движения $\hat{I}(t)$ можно найти из уравнения:

$$\partial\hat{I}(t)/\partial t + i[\hat{H}, \hat{I}(t)] = 0. \tag{3}$$

Решая уравнение (3), получим выражения для $\hat{A}(t)$ и $\hat{A}^+(t)$, которые являются линейными комбинациями операторов координаты и импульса:

$$\hat{A}(t) = i(\epsilon(t)\hat{p} - \dot{\epsilon}(t)\hat{q})/\sqrt{2}, \tag{4}$$

$$\hat{A}^+(t) = -i(\epsilon^*(t)\hat{p} - \dot{\epsilon}(t)\hat{q})/\sqrt{2}, \tag{5}$$

где ϵ удовлетворяет уравнениям

$$\ddot{\epsilon} + \omega^2(t)\epsilon = 0,\ \dot{\epsilon}\epsilon^* - \dot{\epsilon}^*\epsilon = 2i \tag{6}$$

с начальными условиями $\epsilon(0) = 1$, $\dot{\epsilon}(0) = i$.

Когерентное состояние является собственным для оператора $\hat{A}(t)$: $\hat{A}(t)|\alpha, t> =$ $= \alpha|\alpha, t>$, где α – комплексный параметр. Выпишем явный вид зависящего от времени когерентного состояния

$$< q|\alpha, t >= \pi^{-1/4}\epsilon^{-1/2}\exp\left(\frac{i\dot{\epsilon}q^2}{2\epsilon} + \frac{\sqrt{\alpha}q}{\epsilon} - \frac{\alpha^2\epsilon^*}{2\epsilon} - \frac{|\alpha|^2}{2}\right).$$

Чтобы получить когерентные состояния и интегралы движения осциллятора с отталкиванием, необходимо в уравнении (6) положить $\omega^2(t) = -1$. Тогда с учетом начальных условий из (6) получим

$$\epsilon(t) = \mathrm{ch}t + i\mathrm{sh}t. \tag{7}$$

Свойства когерентных состояний осциллятора с отталкиванием. Следуя [11], найдем, что дисперсии координаты и импульса, а также коэффициенты корреляции для параметрически возбуждаемого осциллятора равны:

$$\sigma_{qq} = |\epsilon(t)|^2/2,\ \sigma_{pp} = |\dot{\epsilon}(t)|^2/2,\ r = \sigma_{pq}/\sqrt{\sigma_{qq}\sigma_{pp}},\ \sigma_{pq} = (\epsilon^*\dot{\epsilon} + \dot{\epsilon}^*\epsilon)/4.$$

С учетом (7) для осциллятора с отталкиванием получим:

$$\sigma_{qq} = \sigma_{pp} = \frac{\mathrm{ch}^2 t + \mathrm{sh}^2 t}{2}, \tag{8}$$

$$\sigma_{pq} = \mathrm{ch}t \cdot \mathrm{sh}t. \tag{9}$$

Из (8) видно, что в отличие от гармонического осциллятора, волновая функция которого локализована и дисперсии квадратичных компонент q и p постоянны, волновая функция осциллятора с отталкиванием с течением времени размывается по всему пространству, а дисперсии квадратурных компонент растут экспоненциально в зависимости от времени.

Рассмотрим N-мерный осциллятор с отталкиванием, потенциальная энергия которого записывается в виде квадратичной формы:

$$\prod = -\frac{1}{2}\mathrm{x}^T R \mathrm{x}, \tag{10}$$

где x – N-мерный вектор, а R – матрица $N \times N$ вида:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\mu_1 & -\mu_3 & \dots \\ -\mu_1 & 1 & -\mu_2 & \dots \\ -\mu_3 & -\mu_2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Здесь μ_s – произвольные действительные числа, характеризующие взаимодействие между модами осциллятора с отталкиванием.

Исследуем, возможно ли при наличии взаимодействия между модами осциллятора в виде (10) локализовать волновую функцию осциллятора с отталкиванием. Известно, что поворотом в N-мерной системе координат произвольную квадратичную форму можно привести к каноническому виду, а матрица R при этом будет иметь диагональный вид с диагональными элементами λ_i, являющимися корнями характеристического уравнения

$$\det \begin{Vmatrix} -(\lambda-1) & -\mu_1 & -\mu_3 & \dots \\ -\mu_1 & -(\lambda-1) & -\mu_2 & \dots \\ -\mu_3 & -\mu_2 & -(\lambda-1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Преобразовав таким образом потенциальную энергию, разделим переменные в нашем N-мерном гамильтониане и представим его в виде суммы независящих друг от друга осцилляторов, а собственные значения λ матрицы R будут играть роль частот колебаний этих независимых осцилляторов.

Следует заметить, что все λ_i действительные, т.к. матрица R эрмитова в силу эрмитовости гамильтониана системы. Если взаимодействие между модами N-мерного осциллятора с отталкиванием приведет к тому, что все $\lambda_i < 0$, то состояние будет локализованным, и волновая функция не будет с течением времени размываться по всему пространству; если хотя бы одно λ_i будет неотрицательным, то состояние системы не будет локализованным. Таким образом, исследуя корни уравнения (11), мы узнаем, может ли взаимодействие между модами N-мерного осциллятора с отталкиванием привести к локализации состояния системы.

Левая часть уравнения (11) есть полином степени N. Если воспользоваться формулой полного разложения детерминанта, то можно выписать первые два члена полинома

$$\lambda^n - (TrR)\lambda^{n-1} + ... = 0, \tag{12}$$

где TrR – след матрицы R, и в нашем случае $TrR > 0$.

Для того, чтобы дать ответ на вопрос об отрицательности корней полинома (12), воспользуемся критерием Гурвица. По критерию Гурвица для того, чтобы все корни полинома (12) были отрицательные, необходимо, чтобы все коэффициенты полинома (12) были строго положительными, а если хотя бы один коэффициент в (12) отрицательный, то среди корней полинома (12) есть положительные. Как нетрудно заметить, коэффициент перед λ^{n-1} отрицательный, т.к. $TrR = N > 0$, следовательно, полином (12) имет хотя бы один положительный корень и волновая функция системы не локализована. Таким образом, после преобразования гамильтониана к сумме независимых осцилляторов хотя бы один из этих осцилляторов является осциллятором с отталкиванием, и путем введения рассмотренного нами взаимодействия мод N-мерного осциллятора с отталкиванием в виде (10) не удается локализовать волновую функцию системы.

Функция Вигнера. Функция Вигнера произвольного состояния системы определяется через матрицу плотности состояния $\rho(q,q')$ следующим образом [10]:

$$w(q,p)=\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\rho(q+\frac{r}{2},q-\frac{r}{2})\exp(-ipr)dr. \tag{13}$$

Для чистого состояния $|\alpha,t>$ имеем: $\rho(q,q')=<q|\alpha,t><\alpha,t|q'>$.

Вычисления приводят к следующему результату для функции Вигнера параметрически возбуждаемого осциллятора: $w(q,p)=2\exp(-|i\epsilon p-i\dot{\epsilon}q-\sqrt{2}\alpha|^2)$.

С учетом (7) для осциллятора с отталкиванием получим

$$w(q,p)=2\exp[-(p\mathrm{ch}t-q\mathrm{sh}t)^2-(q\mathrm{ch}t-p\mathrm{sh}t-\sqrt{2}\alpha)^2]. \tag{14}$$

Функция Вигнера нам понадобится для получения следующих результатов.

Новая формулировка квантовой механики. В [12] был введен оператор $\hat{X}$ как произвольная линейная комбинация операторов импульса и кориднаты:

$$\hat{X}=\mu\hat{q}+\nu\hat{p}, \tag{15}$$

где μ и ν – действительные параметры. Оператор $\hat{X}$ эрмитов, поэтому ему соответствует измеримая физическая величина. Физический смысл параметров μ,ν состоит в том, что они описывают ансамбль повернутых и масштабированных систем отсчета в классическом фазовом пространстве, в котором координата X может быть измерена. Как уже было показано в [1], квантовое состояние системы полностью определяется, если классическая функция распределения $W(X,\mu,\nu)$ для переменной X задана в ансамбле систем отсчета в классическом фазовом пространстве. Такая функция хорошо известна как маргинальное распределение, зависящее от двух действительных параметров и связанное с состоянием квантовой системы через функцию Вигнера следующим преобразованием:

$$W(X,\mu,\eta)=\int\exp[-ik(X-\mu q-\nu p)]w(q,p)\frac{dkdqdp}{(2\pi)^2}. \tag{16}$$

Маргинальное распределение относится к классу распределений, которые определяются как Фурье-преобразование некой характеристической функции. Используя это, формулу (16) можно обратить и выразить функцию Вигнера через маргинальное распределение:

$$w(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int W(X,\mu,\nu)\exp[-i(\mu q + \nu p - X)]d\mu d\nu dX. \qquad (17)$$

В [1] было показано, что если $\hat{X}$ наблюдаемая, то функция $W(X,\mu,\nu)$ везде положительна и удовлетворяет условию нормировки

$$\int W(X,\mu,\nu)dX = 1. \qquad (18)$$

Используя определение маргинального распределения (16) и определение функции Вигнера (13), мы можем выразить маргинальное распределение через матрицу плотности системы, а также построить обращение этого преобразования:

$$W(X,\mu,\nu) = \frac{1}{2\pi|\nu|}\int \rho(Z,Z')\exp\left[-i\frac{Z-Z'}{\nu}\left(X-\mu\frac{Z+Z'}{2}\right)\right]dZdZ', \qquad (19)$$

$$\rho(X,X') = \frac{1}{2\pi}\int W(Y,\mu,X-X')\exp\left[i\left(Y-\mu\frac{X+X'}{2}\right)\right]d\mu dY. \qquad (20)$$

Таким образом, зная классическую функцию распределения в фазовом пространстве $W(X,\mu,\nu)$, мы можем восстановить матрицу плотности квантовой системы.

Используя результаты работы [1], мы можем написать уравнение эволюции на маргинальное распределение W для параметрически возбуждаемого осциллятора. Оно имеет следующий вид:

$$\dot{W} - \mu\frac{\partial}{\partial\nu}W + \omega^2(t)\nu\frac{\partial}{\partial\mu}W = 0. \qquad (21)$$

Если положить $\mu = \cos\phi$, $\nu = \sin\phi$, то уравнение (21) перейдет в уравнение на маргинальное распределение в оптической томографии [13].

Связь между квантовым и классическим пропагаторами системы. Решение уравнения (21) может быть формально записано в виде

$$W(X,\mu,\nu,t) = \int \prod(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t)W(X',\mu',\nu',0)dX'd\mu'd\nu', \qquad (22)$$

где $\prod(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t)$ – функция Грина уравнения эволюции (21). Эту функцию в дальнейшем мы будем называть класическим пропагатором системы. Его можно интерпретировать как плотность классической вероятности перехода из начального положения X' в ансамбле систем отсчета в классическом фазовом пространстве в конечное положение X.

Теперь можно прояснить связь между классическим пропагатором и квантовым пропагатором (функцией Грина) для матрицы плотности $\rho(X, X', t)$. Мы здесь изложим общие соображения, все детали можно найти в работах [1, 9].

Как известно, для чистого состояния

$$\rho(X, X', t) = \Psi(X, t)\Psi^*(X', t). \tag{23}$$

Волновая функция в момент времени t связана с ее начальным значением через функцию Грина уравнения Шредингера $G(X, X', t)$

$$\Psi(X, t) = \int \Psi(X', 0) G(X, X', t) dX'.$$

Аналогичное соотношение получается для матрицы плотности:

$$\rho(X, X', t) = \int K(X, X', Y, Y', t)\rho(Y, Y', 0) dY dY'. \tag{24}$$

Функция $K(X, X', Y, Y', t)$ называется квантовым пропагатором матрицы плотности и для чистого состояния выполняется равенство

$$K(X, X', Y, Y', t) = G(X, Y, t)G^*(X', Y', t). \tag{25}$$

Используя соотношение между матрицей плотности и маргинальным распределением (20), найдем связь между квантовым и классическим пропагаторами системы

$$K(X, X', Z, Z', t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{|\nu'|} \exp\left\{ i\left(Y - \mu \frac{X + X'}{2}\right) - i\frac{Z - Z'}{\nu'} Y' + i\frac{Z^2 - Z'^2}{2\nu'} \mu' \right\} \times$$
$$\times \prod(Y, \mu, X - X', Y', \mu', \nu', t) d\mu d\mu' dY dY' d\nu'. \tag{26}$$

Следовательно, если известен класический пропагатор, то мы можем найти квантовый пропагатор матрицы плотности. Чтобы получить уравнение на классический пропагатор, нужно (22) подставить в уравнение эволюции (21). Проделав эти вычисления, получим

$$\frac{\partial \prod}{\partial t} - \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \prod + \omega^2(t) \frac{\partial}{\partial \mu} \prod = \delta(t)\delta(X' - X)\delta(\mu' - \mu)\delta(\nu' - \nu) \tag{27}$$

с начальным условием

$$\prod(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', 0) = \delta(X - X')\delta(\mu - \mu')\delta(\nu - \nu'). \tag{28}$$

В [14] было показано, что функция Грина $G(q, q', t)$ является решением системы уравнений

$$I_q G(q, q', t) = \hat{q}' G(q, q', t), \tag{29}$$

$$I_p G(q, q', t) = -\hat{p}' G(q, q', t), \tag{30}$$

где $\hat{I}_p = (\hat{A} - \hat{A}^+)/i\sqrt{2}$, $\hat{I}_q = (\hat{A} + \hat{A}^+)/\sqrt{2}$.

Уравнения (29), (30) могут быть тривиально обобщены в уравнения на квантовый пропагатор матрицы плотности $K(X, X', Y, Y', t)$, что дает

$$\hat{I}_x K(X, X', Y, Y', t) = \hat{X} K(X, X', Y, Y', t), \tag{31}$$

$$\hat{I}_p K(X, X', Y, Y', t) = -\hat{P}' K(X, X', Y, Y', t), \tag{32}$$

где $\hat{P}' = -i\partial/\partial X'$; аналогичные соотношения могут быть записаны для переменных Y, Y'.

Затем, обращая соотношение (26), получим уравнения на классический пропагатор

$$\tilde{I}_q \prod(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t) = \tilde{q}' \prod(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t), \tag{33}$$

$$\tilde{I}_p \prod(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t) = -\tilde{p}' \prod(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t). \tag{34}$$

Здесь операторы $\tilde{q}'$ и $\tilde{p}'$ оказывают действие на $\prod$ и являются аналогами операторов $\hat{q}'$ и $\hat{p}'$, действующих на K. Они соответствено равны

$$\tilde{q}' = -\left(\frac{\partial}{\partial X'}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu'} - i\frac{\nu'}{2}\frac{\partial}{\partial X'}, \tag{35}$$

$$\tilde{p}' = -\left(\frac{\partial}{\partial X'}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \nu'} + i\frac{\mu'}{2}\frac{\partial}{\partial X'}. \tag{36}$$

Аналогично, операторы $\tilde{I}_q$ и $\tilde{I}_p$ действуют на $\prod$ и являются аналогами операторов $\hat{I}_q$ и $\hat{I}_p$, действующих на K.

Для того, чтобы найти явный вид $\prod$, нужно решить систему уравнений (33), (34), затем решение подставить в (27), чтобы найти зависимость $\prod$ от времни и, наконец, учесть начальное условие (28). Все эти вычисления достаточно запутаны, и их можно найти в [15]. Мы же здесь выпишем явный вид классического пропагатора для параметрически возбуждаемого осциллятора

$$\prod(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t)=\delta\left(\nu'-i\frac{\nu\dot{\xi}+\mu\xi}{2}\right)\delta\left(\mu'-i\frac{\nu\dot{\eta}+\mu\eta}{2}\right)\delta(X-X'), \tag{37}$$

где $\xi=\epsilon^*-\epsilon$, $\eta=\epsilon^*+\epsilon$.

Учитывая (7), в нашем случае для осциллятора с отталкиванием получим

$$\xi=-2i\mathrm{sh}t,\ \eta=2\mathrm{ch}t. \tag{38}$$

Все последующие вычисления мы проделаем непосредственно для осциллятора с отталкиванием.

Квантовый пропагатор и маргинальное распределение когерентного состояния для осциллятора с отталкиванием. Теперь, зная явный вид классического пропагатора, мы можем найти квантовый пропагатор, если (37) подставить в (26). Но интеграл в (26) можно вычислить, только если известна зависимость $\epsilon(t)$.

Для осциллятора с отталкиванием она дается формулой (7). С учетом этих замечаний для квантового пропагатора матрицы плотности получаем

$$K(X,X',Z,Z',t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{sh}t}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\mathrm{sh}t}[(X^2-X'^2+Z^2-Z'^2)\mathrm{ch}t-2XZ+2X'Z']\right\}. \tag{39}$$

Зная K, мы можем записать функцию Грина G волновой функции. Однако она будет определена с точностью до фазового множителя, не зависящего от пространственных координат, но, вероятно, зависящего от времени, т.к. $K=GG^*$.

$$G(X,Z,t)=\frac{e^{iF(t)}}{\sqrt{2\pi\mathrm{sh}t}}\exp\left\{\frac{1}{2\mathrm{sh}t}[(X^2+Z^2)\mathrm{ch}t-2XZ]\right\}, \tag{40}$$

где $F(t)$ – неизвестная действительная функция.

Это уже известный результат, полученный в литературе другими методами [16], однако он для нас интересен тем, что дает возможность сравнить результаты, полученные в данной работе, с результатами, даваемыми стандартным формализмом.

Теперь найдем маргинальное распределение для осциллятора с отталкиванием. В стандартной формулировке квантовой механики состояние $|\alpha,t>$ определяется как решение уравнения Шредингера с начальными условиями

$$\hat{a}\Psi(q,0)=\alpha\Psi(q,0). \tag{41}$$

Но в той формулировке квантовый механики, которую мы строим, мы хотим, чтобы когерентное состояние определялось как состояние с маргинальным распределением, удовлетворяющим уравнению эволюции (21) с начальными условиями, перенесенными с уравнения (41) на уравнение для маргинального распределения. Действуя оператором $\hat{a}$ на матрицу плотности и учитывая (41), получим

$$\hat{a}\rho(X, X') = \alpha\rho(X, X'). \tag{42}$$

Теперь, используя соотношение (20) между матрицей плотности и маргинальным распределением, а также перенося действие оператора $\hat{a}$ с матрицы плотности ρ на маргинальное распределение W и заменяя его оператором $\tilde{a}$, получим

$$\tilde{a}W_\alpha(X, \mu, \nu) = \alpha W_\alpha(X, \mu, \nu), \tag{43}$$

где оператор

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\mu + i\nu}{2}\frac{\partial}{\partial X} + \left(\frac{\partial}{\partial\mu} + i\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-1}\right\}. \tag{44}$$

Теперь мы можем переформулировать задачу о нахождении маргинального распределения когерентного состояния. Мы решаем уравнение (43) и находим W_α при $t = 0$, затем, зная классический пропагатор $\prod$, с помощью (22) находим W_α в произвольный момент времени t. Решение уравнения (43) записывается в виде [9]:

$$W_\alpha = \frac{N}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}}\exp\left\{-\frac{(X + i\frac{\alpha - \alpha^*}{\sqrt{2}}\nu - \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}}\mu)^2}{\mu^2 + \nu^2}\right\}, \tag{45}$$

где N – нормировочная константа.

Осталось найти зависимость от времени для W_α. Используя уравнение (22) и условие нормировки (18), получим

$$W_\alpha(X, \mu, \nu, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left\{\frac{(X - < X >)^2}{2\sigma_x^2}\right\}, \tag{46}$$

где

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2}[(\mu \mathrm{ch}t + \nu \mathrm{ch}t)^2 + (\nu \mathrm{ch}t + \mu \mathrm{sh}t)^2],$$

$$< X > = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha + \alpha^*)(\mu \mathrm{ch}t + \nu \mathrm{sh}t) + i(\alpha^* - \alpha)(\nu \mathrm{ch}t + \mu \mathrm{sh}t)].$$

Заметим, что если мы пойдем стандартным путем, т.е. сначала найдем волновую функцию когерентного состояния, затем по ней построим матрицу плотности, а по матрице плотности, используя (19), найдем маргинальное распределение, то мы придем к тому же результату, даваемому формулой (46).

Однако, имея в виду такой способ построения маргинального распределения W_∞, мы можем построить маргинальное распределение W_n для состояний ψ_n, являющихся собственными для оператора числа фотонов $\hat{a}^+\hat{a}$. Распределение W_α будет играть роль производящей функции для распределения W_n [9]:

$$W_\alpha(X,\mu,\nu,t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} W_{nm}(X,\mu,\nu,t). \tag{47}$$

Выражение (46) можно представить в виде

$$W_\alpha(X,\mu,\nu,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|r|} e^{-|\alpha|^2-y^2} e^{-t^2+2ty} e^{-t^{*2}+2t^*y}, \tag{48}$$

где $r = \dot{\epsilon}\nu + \epsilon\mu$, $t = \alpha r^*/\sqrt{2}|r|$, $y = X/|r|$.

Используя соотношение $e^{-t^2+2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n H_n(y)/n!$, получим

$$W_{nm}(X,\mu,\nu,t) = \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}|r|} \frac{H_n(y)H_m(y)}{\sqrt{n!m!2^{n+m}}} \left(\frac{r^*}{|r|}\right)^n \left(\frac{r}{|r|}\right)^m. \tag{49}$$

Маргинальное распределение W_n получается из W_{nm}, если положить $W_n \equiv W_{nn}$. Окончательно получим

$$W_n(X,\mu,\nu,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|r|} e^{-y^2} \frac{1}{n!2^n} H_n^2(y), \tag{50}$$

где $|r| = \sqrt{2}\sigma_x$.

Подведем результаты даной работы. Как мы увидели, интегралы движения играют важную роль в классической формулировке квантовой механики, давая возможность определить классический пропагатор уравнения эволюции функции маргинального распределения. Мы в явном виде нашли классический пропагатор $\prod$ для параметрически возбуждаемого осциллятора и по нему восстановили квантовый пропагатор матрицы плотности и, с точностью до фазового множителя, квантовый пропагатор волновой функции для осциллятора с отталкиванием.

Мы вычислили маргинальное распределение W_α для осциллятора с отталкиванием, исходя из классической формулировки квантовой механики. Зависимость W_α от времени была получена с помощью классического пропагатора, и была установлена идентичность полученного таким образом результата с результатом, полученным при стандартном подходе с использованием уравнения Шредингера. Исходя из маргинального распределения W_∞, мы вычислили маргинальное распределение W_n для собственных состояний оператора числа фотонов.

Также была рассмотрена задача о возможности локализации волновой функции N-мерного осциллятора с отталкиванием при взаимодействии мод. Мы увидели, что если взаимодействие между модами осциллятора с отталкиванием имеет вид квадратичной формы, то волновая функция N-мерного осциллятора не может быть локализованной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mancini S., Man'ko V. I., and Tombesi P. Phys. Lett., A **213**, 1 (1996).
[2] Mancini S., Man'ko V. I., and Tombesi P. Found. Phys., **27**, 801 (1997).
[3] Man'ko V. I. Quantum Mechanics and Classical Probability Theory, in: Symmetries in Science IX, Eds.: B. Gruber and M. Ramek, Plenum Press. New York, 1997, p. 215.
[4] Man'ko O. V. J. Russ. Laser Research, **17**, 439 (1996).
[5] Man'ko V. I. and Safonov S. S. Teor. Mat. Fiz., **112**, 467 (1997).
[6] Man'ko O. V. and Man'ko V. I. J. Russ. Laser Research, **18**, 467 (1997).
[7] Man'ko V. I. Energy Levels of Quantum System in the Classical Formulation of Quantum Mechanics, in: Proceedings of the APCTP Conference (Seoul, June 1996), World Scientific, (1997), in press., J. Russ. Laser Research, **17**, 579 (1996).
[8] Man'ko V. I. Optical Symplectic Tomography and Classical Probability Instead of Wave Function in Quantum Mechanics, in: GROUP21. Physical Application and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras. Eds. H.-D. Doebner, W. Scherer and C. Schultz. World Scientific, Singapore, **2**, 764 (1997).
[9] Man'ko V. I., Rosa L., and Vitale P. Phys. Rev., A, June 1998, (in press).
[10] Dodonov V. V., Korennoy Ya. A., Man'ko V. I., Moukhin Y. A. Napoli Preprint, DSF-T-94/33.
[11] Man'ko O. V. Phys. Lett., A **228**, 29 (1997).
[12] Mancini S., Man'ko V. I., and Tombesi P. Quantum Semiclass. Opt., **7**, 615 (1995).
[13] Vogel K. and Risken H. Phys. Rev., A **40**, 2847 (1989).

[14] D o d o n o v V. V., M a l k i n J. A., and M a n' k o V. I. Int. J. Theor. Phys., **14**, 37 (1975). C a m p b e l l W. B., F i n k l e r P., J o n e s C. E., and M i s h e l o f f M. N., Ann. Phys., **96**, 286 (1976).

[15] M a n' k o V. I., R o s a L., and V i t a l e P. Napoli Preprint DSF 57/97.

[16] F e y n m a n R. P. and H i b b s A. R. Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill, New York, 1965.

Поступила в редакцию 28 апреля 1998 г.