

УДК 533.9

## ОБРЕЗАНИЕ КУЛОНОВСКОГО ЛОГАРИФМА И МОДЕЛИРОВАНИЕ КУЛОНОВСКИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ИЗ ПЕРВОПРИНЦИПОВ

С. И. Яковленко

*Проведен анализ работ по моделированию кулоновских столкновений методом динамики многих частиц. Показано, что результаты численных расчетов согласуются с установившейся в 60-х годах точкой зрения, согласно которой в классической идеальной плазме значение верхнего предела в кулоновском логарифме следует выбирать порядка дебаевского радиуса. Показана несостоятельность недавно опубликованного утверждения, что компьютерное моделирование демонстрирует необходимость обрезать кулоновский логарифм на величине порядка среднего межчастичного расстояния.*

Как известно, полные кинетические сечения, характеризующие упругие столкновения кулоновских частиц, оказываются пропорциональными величине  $\Lambda = \ln(\rho_{max}/\rho_{min})$ , называемой кулоновским логарифмом. Если величина минимального прицельного расстояния достаточно ясна ( $\rho_{min} \sim e^2/T_e$ ), то вопрос о порядке значения верхнего предела  $\rho_{max}$  имеет длительную историю. (Здесь рассматривается простая классическая плазма частиц с зарядами  $e$  и  $-e$ , плотностью частиц каждого сорта  $N_e$  и температурой  $T_e$ .)

Еще 70 лет назад в классической работе Ленгмюра предложено использовать в качестве параметра обрезания дебаевский радиус  $r_D \propto N_e^{-1/2}$  [1]. В ряде других работ предлагалось обрезать кулоновский логарифм на величине порядка среднего межчастичного расстояния  $\rho_{max} \propto N_e^{-1/3}$ . Исследование связи временных корреляций микрополя с характеристиками многократного рассеяния показало, однако, что в классической идеальной плазме обрезание должно проводиться именно на дебаевском радиусе. Наиболее

завершенное рассмотрение этого вопроса принадлежит В. И. Когану (см. [2] и цитированную там литературу, а также обзор [3]). Этой точки зрения придерживаются сейчас подавляющее большинство специалистов в физике плазмы.

В работе [4] (см. также [5]) характеристики кулоновских столкновений рассматривались на основе компьютерного моделирования динамики многих частиц (ДМЧ). Основной целью работы было рассмотрение области параметров, где условия идеальности плазмы начинают нарушаться (только там можно было рассчитывать на получение новых результатов). Однако для шивки с известными результатами в [4] были представлены расчеты и для идеальной плазмы. Результаты этих расчетов, как и следовало ожидать, были в хорошем согласии с традиционными представлениями.

Однако в недавней работе [6] на основе результатов нового моделирования ДМЧ, на вопрос о значении верхнего предела кулоновского логарифма дан ответ, противоречащий общепринятому мнению. Утверждается, что  $\rho_{max} \sim N_e^{-1/3}$ . Никаких новых физических аргументов в пользу этой точки зрения в [6] не приведено; причины отличия результатов нового моделирования ДМЧ от результатов [4], согласующихся с традиционной точкой зрения, в работе [6] не обсуждаются.

Ниже показано, что для вывода о том, что  $\rho_{max} \sim N_e^{-1/3}$ , в работе [6] нет оснований, более того, результаты моделирования [6] ненадежны, поскольку в использованной модели не выполнены условия хаотичности движения частиц плазмы. Следует также отметить, что на ряд других существенных ошибок при интерпретации результатов численных расчетов указано в обзоре [7].

*Использовавшиеся модели.* В работе [4] рассматривалась плазма хаотически движущихся электронов и ионов в ящике с зеркально отражающими стенками. Были вычислены средние "длины поворота". Длина поворота  $l_{\pi/2}$  определялась как длина траектории, которую проходит частица до того момента, когда взаимодействие с другими частицами приведет к изменению направления импульса на угол, равный  $\pi/2$ . Длины поворота сопоставлялись с выражением  $l = 3T_e^2/4\sqrt{\pi}\Lambda N_e$ , обычно используемым при вычислении длины свободного пробега электронов в бинарной теории [1, 3, 8]. Соответственно вводился кулоновский фактор  $\tilde{\Lambda} = l_{\pi/2}4\sqrt{\pi}N_e/3T_e^2$ , который в квазибинарной теории соответствует кулоновскому логарифму. Рассмотрение зависимости  $\tilde{\Lambda}$  от параметра  $\delta = 2e^6 N_e/T_e^3$ , характеризующего степень идеальности плазмы, показало, что вычисленный на основе моделирования ДМЧ кулоновский фактор хорошо описывался следующим выражением для кулоновского логарифма:

$$\Lambda = (1/2)\ln(1 + 9/4\pi\delta). \quad (1)$$

Иначе говоря, получаемые в моделировании ДМЧ [4, 5] длины поворота соответствуют кулоновским сечениям, в которых кулоновский логарифм определяется обрезанием на дебаевском радиусе.

В работе [6] также вычислялся кулоновский фактор, но по отношению к другой физической величине. Вычислялась сила трения мононаправленного и моноэнергетического электронного пучка о неподвижные ионы. Она сопоставлялась с выражением  $F = \Lambda(4\pi e^4 N_e / m u^2)$ , полученным для силы трения пробной частицы в среде покоящихся бесконечно тяжелых частиц, экранированных электронами плазмы [3, 8]. Из этого сравнения определялся кулоновский фактор  $\Lambda^*$ . Здесь  $m, u$  – приведенная масса и относительная скорость сталкивающихся частиц. В расчетах [6] масса частиц пучка бралась много меньшей массы неподвижного иона.

Результаты расчетов сведены в [6] в таблицу. Воспроизведем эти данные.

Т а б л и ц а 1

Результаты расчетов ДМЧ из работы [6] (первые пять столбцов) и некоторые данные, следующие из обработки этих результатов (столбцы 6 – 8)

$\Lambda$	$\Lambda^*$	$r_D N_e^{1/3}$	$t_0 / \tau_{ei}$	$\rho_{max} N_e^{1/3}$	$\delta$	$r_D N_e^{1/3} \exp(\Lambda^* - \Lambda)$	$t_0 \omega_L$
3,9	3,2	1,1	20	0,7	$5,7 \cdot 10^{-4}$	0,576	10,5
4,9	3,7	1,5	50	0,45	$8,8 \cdot 10^{-5}$	0,452	19,2
6	4,5	2,2	20	0,5	$8,9 \cdot 10^{-6}$	0,491	5,2
6,3	5,0	2,5	100	0,6	$4,1 \cdot 10^{-6}$	0,681	23
7,4	5,9	3,5	100	0,8	$5,5 \cdot 10^{-7}$	0,781	16,5

В таблице:  $\Lambda$  – кулоновский логарифм с обрезанием на дебаевском радиусе;  $\Lambda^*$  – кулоновский фактор, определенный в [6] из расчетов силы трения электронного пучка о неподвижный ион методом ДМЧ;  $\rho_{max}$  – значения параметра обрезания, вычисленные на основе  $\Lambda^*$ ;  $t_0$  – время расчета варианта;  $\tau_{ei} = N_e^{-1/3} / (3T_e/m)$  – время пролета межчастичного расстояния (используемое в [6]),  $\omega_L = (4\pi e^2 N_e / m)^{1/2}$  – ленгмюровская частота.

Приведенные в пятом столбце данные для  $\rho_{max} N_e^{1/3}$  с точностью до 12% согласуются со значениями (7-й столбец), вычисляемыми по формуле  $\rho_{max} N_e^{1/3} = r_D N_e^{1/3} \exp(\Lambda^* - \Lambda)$ , на основе которой можно определить верхний предел обрезания по приведенным в

[6] данным. При получении данных 8-го столбца использовалось выражение:  $t_0\omega_L = (4\pi/3)^{1/2}(\delta/2)^{1/6}(t_0/\tau_{ei})$ .

Вывод о том, что параметром обрезания в идеальной плазме является величина  $N_e^{-1/3}$ , сделан в работе [6] на том основании, что для проведенных расчетов  $\rho_{max}N_e^{1/3} < 1$  (пятый столбец).

*Анализ численных результатов.* Не касаясь пока вопросов, связанных с надежностью результатов моделирования, проведенного в работе [6], рассмотрим приведенные выше численные результаты.

При анализе вопроса о величине параметра обрезания следует помнить, что выражение под знаком логарифма определено с точностью до безразмерного множителя, и поэтому сам кулоновский логарифм определен с точностью до слагаемого порядка единицы:  $\Lambda_{1/2} = -(1/2)\ln(\delta) + \text{const}$ . Если бы обрезание имело место на среднем межчастичном расстоянии, то для кулоновского логарифма было бы справедливо выражение:  $\Lambda_{1/3} = -(1/3)\ln(\delta) + \text{const}$ .

Для того, чтобы обосновать численными расчетами выбор между этими двумя способами обрезания, надо проследить, какому типу зависимости следует полученный на основе расчетов ДМЧ кулоновский фактор, в достаточно широком диапазоне изменения значений  $\delta$  (при этом, конечно, должно быть  $\delta \ll 1$  и  $\Lambda \gg 1$ ). Если в результате такого рассмотрения получится зависимость типа  $\Lambda_{1/3}$  при  $\delta \rightarrow 0$ , надо в первую очередь искать либо неадекватность математической модели обычно рассматриваемым условиям, либо ошибки в методах решения уравнений ДМЧ и обработки результатов.

В отличие от работ [4, 5] в работе [6] зависимость  $\Lambda$  от  $\delta$  не исследована. Восполним этот пробел.

Учитывая, что  $r_D = (T_e/4\pi e^2 N_e)^{1/2}$ , выразим параметр идеальности  $\delta$  через величину  $r_D N_e^{1/3}$ :  $\delta = (\pi^3 2^8)^{-1} (r_D N_e^{1/3})^{-6}$ . Это позволяет нанести данные работы [6] на общую картину зависимостей кулоновского логарифма от параметра идеальности  $\delta$  для различных моделей обрезания и различных численных расчетов (см. рис. 1).

Как уже отмечалось, результаты [4] хорошо описываются кулоновским логарифмом с традиционным обрезанием на дебаевском радиусе. Данные работы [6], на первый взгляд, лучше описываются зависимостью  $\Lambda_{1/3}$ . Однако если учесть, что значение кулоновского логарифма определено с точностью до константы порядка единицы, ситуация меняется. Действительно, величина  $\Lambda^* + 1$  очень хорошо соответствует (1). Иначе говоря, результаты [6] хорошо описываются формулой:  $\Lambda^* = \Lambda_{1/2}^* = -(1/2)\ln(\delta) - 1$ .

Некоторое отличие имеет место при дебаевском радиусе, равном межчастичному



расстоянию (для  $r_D N_e^{1/3} = 1,1$ ). Величина  $\Lambda^*$ , полученная из расчета силы трения, начинает отклоняться от  $\Lambda_{1/2}^*$  уже при  $\delta \sim 10^{-3}$  ( $r_D N_e^{1/3} \approx 1$ ), в то время как кулоновский фактор  $\tilde{\Lambda}$ , полученный на основе расчета длин поворота, совпадает с кулоновским логарифмом вплоть до  $\delta \sim 0,1$  ( $r_D N_e^{1/3} \approx 0,5$ ).

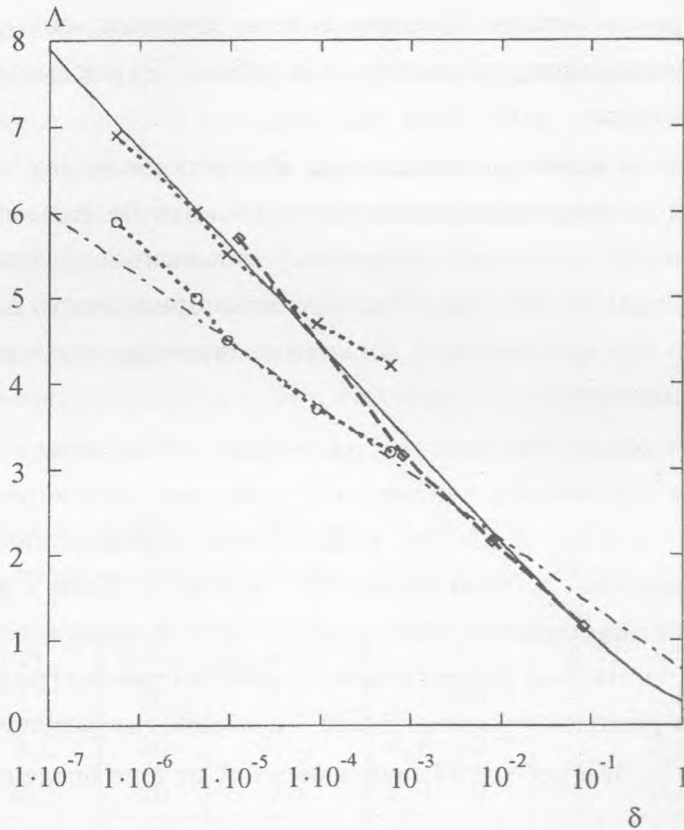


Рис. 1. Зависимости кулоновского логарифма от параметра идеальности  $\delta$  для различных способов обрезания и различных численных расчетов. Сплошная кривая рассчитана по формуле (1), соответствующей обрезанию на дебаевском радиусе; штрих-пунктирная – на  $N_e^{-1/3}$  ( $\Lambda_{1/3} = \ln((3/2)2/\delta)^{1/3}$ ); данные моделирования ДМЧ:  $\diamond$  –  $\tilde{\Lambda}$  [4, 5],  $\circ$  –  $\Lambda^*$  [6],  $\times$  –  $\Lambda^* + 1$ .

Эти различия можно было бы пытаться объяснить физическими причинами. Например, можно вспомнить, что численный множитель при верхнем параметре обрезания может быть различным для разных физических процессов. Это может приводить к сдвигу  $\Lambda^*$  относительно  $\tilde{\Lambda}$  и  $\Lambda$ . Этот сдвиг несущественен при  $\Lambda \approx \tilde{\Lambda} \approx \Lambda^* \gg 1$ , когда только и справедливы имеющиеся теоретические представления о кулоновских столкновениях в плазме. Критерии применимости квазибинарной теории по отношению к

различным физическим процессам тоже могут численно отличаться. Однако, как показано ниже, дело здесь не в физических причинах, а в неадекватности исходной модели работы [6] обычным условиям в плазме. Обсудим это подробнее.

*Кулоновские столкновения и микрополя.* Уже в 60-м году Коганом было установлено [2] (см. также [3]), что можно обойтись без искусственного обрезания прицельного параметра. Им рассмотрено рассеяние пробной частицы в газе полевых частиц, беспорядочно распределенных по объему и имеющих максвелловское распределение по скоростям. Далее показано, что квадрат поперечного приращения импульса пробной частицы пропорционален следующему выражению для коэффициента корреляции электрического микрополя, в моменты времени  $t$  и  $t + \tau$ :

$$\langle \mathbf{E}_{\perp}(t) \mathbf{E}_{\perp}(t + \tau) \rangle = \left\langle \sum_i^n \sum_k^n \mathbf{E}_{i\perp}(t) \mathbf{E}_{k\perp}(t + \tau) \right\rangle = n \langle \mathbf{E}_{1\perp}(t) \mathbf{E}_{1\perp}(t + \tau) \rangle. \quad (2)$$

Здесь угловые скобки означают статистическое усреднение;  $\mathbf{E}_{\perp}(t)$  – проекция напряженности микрополя на плоскость, перпендикулярную скорости пробной частицы (оно представлено в виде суммы полей  $\mathbf{E}_{i\perp}(t)$ ,  $\mathbf{E}_{k\perp}(t)$  отдельных полевых частиц  $i, k$ );  $\mathbf{E}_{1\perp}(t)$  – поле одной произвольной частицы в месте нахождения пробной;  $n$  – число частиц в рассматриваемом объеме.

Дальнейшие выкладки привели к известным выражениям для эффективных частот столкновений. Здесь важно отметить следующее. Из выражения (2) сразу видно, что обрезание на  $\rho_{max} \sim N_e^{-1/3}$  в рассматриваемых условиях realizоваться не может, и это прямо указано в [2]. Действительно, усредненное воздействие микрополя свелось к сумме воздействий полевых частиц независимо от величины прицельного параметра, т.е. безотносительно к тому,  $\rho < N_e^{-1/3}$  или  $\rho > N_e^{-1/3}$ . Этот результат непосредственно следует из предположения о хаотичности движения полевых частиц.

В связи с этим остановимся на ключевом вопросе: выполнены ли в модели работы [6] эти условия хаотичности? Из текста работы [6] следует, что не выполнены. Действительно, в [6] рассмотрено рассеяние на неподвижных ионах мононаправленного и моноэнергетического электронного пучка. Ясно, что в этих условиях нельзя говорить не только о хаотичности движения, но даже и о температуре электронов. Величина, обозначенная в [6] символом  $T_e$ , пропорциональна энергии электрона пучка и никак не может служить мерой теплового разброса скоростей. Если вводить для таких условий температуру электронов обычным способом (исключая среднюю, направленную компоненту скорости), то температура окажется просто равной нулю ( $T_e = 0$ ).

Соответственно, в этой модели утрачивает смысл и понятие дебаевского радиуса. Искусственное упорядочивание движения в работе [6] могло привести к эффективному обрезанию воздействия частиц с  $\rho > N_e^{-1/3}$ .

Модель, в которой все электроны движутся относительно ионов с одинаковым вектором скорости, не соответствует условиям, обычно реализующимся в плазме. В отличие от работы [6], в существенно более ранней работе [4] рассматривалась ситуация, когда электроны двигаются хаотически, т.е. модель, адекватная обычным условиям. Поэтому расчеты [4] и согласуются с имеющимися теоретическими представлениями.

Разумеется, в моделировании [6] возможны и другие ошибки, однако сказанного вполне достаточно, чтобы не доверять основному выводу этой работы о том, что компьютерное моделирование демонстрирует необходимость обрезать кулоновский логарифм на величине порядка среднего межчастичного расстояния, а не дебаевского радиуса, как это обычно принято.

*Заключение.* С практической точки зрения вопрос об обрезании кулоновского логарифма, может быть, не столь уж важен. Отличие двух способов обрезания приводит к разнице в значениях кулоновского логарифма всего лишь на 30%. Однако этот вопрос принципиально важен для современных представлений об основах физики плазмы (да и вообще, физики многих частиц с силой взаимодействия обратно пропорциональной квадрату расстояния). Одна из целей проведенного выше анализа – предотвратить путаницу в этом фундаментальном вопросе.

Я благодарен В. И. Когану за то, что он привлек мое внимание к материалу работы [6] и ознакомил меня со своей рецензией на этот материал. В упомянутой рецензии высказана, в частности, мысль, что физически прозрачная работа [2] ввиду достаточного объема заложенной в нее исходной информации имеет не меньше оснований считаться анализом из первопринципов, чем компьютерное моделирование [6]. С этим надо, безусловно, согласиться. Никакое моделирование не даст новой информации в тех случаях, когда задача допускает достаточно полное аналитическое рассмотрение. Скорее наоборот, надо использовать такие аналитически решаемые задачи для тестирования компьютерных программ и моделей с тем, чтобы затем путем численного моделирования надежно получать результаты там, где аналитическое рассмотрение провести не удастся.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Langmuir L. Proc. Nat. Acad., 14, 627 (1928).

- [2] К о г а н В. И. ДАН СССР, **135** (6), 1374 (1960).
- [3] С и в у х и н Д. В. В сб. Вопросы теории плазмы, вып. 4, под ред М. А. Леонтовича, М., Атомиздат, 1964, с. 81.
- [4] М а й о р о в С. А., Т к а ч е в А. Н., Я к о в л е н к о С. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 8, 47 (1989).
- [5] М а й о р о в С. А., Т к а ч е в А. Н., Я к о в л е н к о С. И. Изв. ВУЗов, Физика, **35** (2), 10 (1992).
- [6] М а й о р о в С. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9 – 10, 99 (1997).
- [7] Т к а ч е в А. Н., Я к о в л е н к о С. И. Изв. ВУЗов, Физика, **41** (1), 47 (1998).
- [8] Т р у б н и к о в Б. А. В сб. Вопросы теории плазмы, вып. 1, под ред. М. А. Леонтовича, М., Атомиздат, 1963, с. 98.

Поступила в редакцию 14 мая 1998 г.