Краткие сообщения по физике № 11-1985 г.

УДК 533.951

К ТЕОРИИ ТОКОВО–КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОГО ТРУБЧАТОГО РЭП

Л.С. Богданкевич, Р.Р. Киквидзе

Исследуется возможность развития токово-конвективной неустойчивости в частично компенсированном трубчатом релятивистском электронном пучке, распространяющимся в цилиндрическом волноводе. Найдены пороговый ток и инкремент и проведено сравнение с соответствующими величинами для диокотронной неустойчивости.

Несмотря на большое число публикаций, посвященных исследованию токово-конвективной неустойчивости релятивистских электронных пучков (РЭП), до сих пор не рассмотрена задача развития этой неустойчивости в тонком трубчатом РЭП. Вместе с тем, именно такой пучок использовался в работе /1/ при создании плазменного СВЧ генератора высокой мощности. В настоящей работе указанный пробел теории восполняется.

Ниже будем следовать работе /2/, в которой получено общее уравнение, описывающее низкочастотные неустойчивости трубчатого РЭП с внешним и внутренним радиусами R_b и r_b, распространяющегося в цилиндрическом металлическом волноводе с радиусом R и длиной L. Пучок считается тонким, т. е. $\Delta \equiv R_b - r_b \ll R_b$, а плотность электронов n_b в сечении пучка однородной; постоянный коэффициент, определяющий степень компенсации заряда пучка ионами, $f = n_i/n_b \lesssim 1$. Внешнее продольное магнитное поле замагничивает электроны пучка, но не замагничивает ионы, так что выполняются условия (для возмущений вида $e^{-i\omega t + ik_z z + il\theta}$): $\omega^2 \gg \Omega_i^2$, $k_z u \gg \omega_{Li}$, $|\omega - k_z u - l\omega_e|^2$, $\omega_b^2/\gamma \ll \Omega_e^2$. Здесь ω, k_z и l – частота, продольное и азимутальное волновые числа возмущений; u – продольная скорость электронов пучка; $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор; $\omega_b = (4\pi e^2 n_b/m)^{1/2}$; $\omega_{Li} = (4\pi e^2 n_i/M)^{1/2}$ – ленгмюровские частоты электронов пучка и ионов; Ω_e и Ω_i – циклотронные частоты электронов и ионов; $\omega_e = (\omega_b^2/2\gamma^2\Omega_e)(1 - \gamma^2 f)(1 - r^2/r_b^2)$ – угловая скорость вращения электронов в собственных полях пучка и продольном магнитном поле — считается нерелятивистской, т. е. $\gamma\omega_e r_b/c \sim \omega_b^2\Delta/\gamma\Omega_e R_b c \ll 1$.

В указанных условиях уравнение для эффективного потенциала поля возмущений $\Phi = \varphi - uA_z/c$ (φ и $\vec{A}$ — скалярный и векторный потенциалы, причем $|A_\perp| \ll \varphi$) записывается в виде /2/:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\epsilon_i \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \epsilon_i \frac{l^2}{r^2}\Phi - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_i\right)\left[\epsilon_i \frac{\omega_b^2}{\gamma^3(\omega - k_z u - l\omega_e)^2}\right]\Phi = \tag{1}$$

$$= \frac{e\Phi\, d\omega_b^2/dr}{r\Omega_e\gamma^2(\omega - k_z u - l\omega_e)},$$

где $\epsilon_i = 1 - \omega_{Li}^2/\omega^2$. Правая часть (1) определяет граничные условия $\Phi(0) < < \infty$, $\Phi(R) = 0$, $\{\Phi\}_{r=r_b,R_b} = 0$,

$$\left\{\epsilon_i \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\}_{r=r_b} = \frac{2l}{r_b}\frac{\omega_d\Phi(r_b)}{\omega - k_z u}, \quad \left\{\epsilon_i \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\}_{r=R_b} = -\frac{2l}{R_b} \times$$

$$\times \frac{\omega_d\Phi(R_b)}{\omega - k_z u - l\omega_e(R_b)}.$$

Здесь $\omega_d = \omega_b^2/2\gamma^2\Omega_e$, фигурные скобки означают разность значений по обеим сторонам границы пучка.

Сформулированная граничная задача для трубчатого пучка была проанализирована в работе /3/ при рассмотрении диокотронной неустойчивости, когда $\epsilon_i = 1$, а ток пучка намного меньше пирсовского тока, т. е. $a = \omega_b^2\Delta R_b/\gamma^3 u^2 \ll 1$, и поэтому последним слагаемым в левой части (1) можно пренебречь. Мы будем следовать этой работе, считая, однако, $\epsilon_i \neq 1$. В результате получим новое дисперсионное соотношение:

$$A(\omega) + (\epsilon_i - 1)B(\omega) = 0,$$

где

$$
\begin{aligned}
A(\omega) = {} & \frac{(\omega - k_z u)^2}{\omega_d^2} + \frac{l}{|l|}\,\frac{\omega - k_z u}{\omega_d}\left[\frac{R_b^{2|l|} - r_b^{2|l|}}{R^{2|l|}} + \right. \\
& \left. + |l|\left(1 - \frac{r_b^2}{R_b^2}\right)(1 - \gamma^2 f)\right] + |l|\left(1 - \frac{r_b^2}{R_b^2}\right)(1 - \gamma^2 f)\left(1 - \frac{r_b^{2|l|}}{R^{2|l|}}\right) - \\
& - \left(1 - \frac{r_b^{2|l|}}{R_b^{2|l|}}\right)\left(1 - \frac{R_b^{2|l|}}{R^{2|l|}}\right),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
B(\omega) = {} & \frac{1}{2}\left[1 + \frac{r_b^{2|l|}}{R_b^{2|l|}} - \left(1 - \frac{r_b^{2|l|}}{R_b^{2|l|}}\right)\left(1 - \frac{R_b^{2|l|}}{R^{2|l|}}\right)\right]\frac{(\omega - k_z u)^2}{\omega_d^2} + \\
& + \frac{l}{2}\left(1 - \frac{r_b^2}{R_b^2}\right)(1 - \gamma^2 f)\left[1 + \frac{r_b^{2|l|}}{R_b^{2|l|}} - \left(1 - \frac{r_b^{2|l|}}{R_b^{2|l|}}\right)\left(1 - \frac{R_b^{2|l|}}{R^{2|l|}}\right)\right] \times \\
& \times \frac{(\omega - k_z u)}{\omega_d} + \frac{|l|}{2}\left(1 - \frac{r_b^2}{R_b^2}\right)(1 - \gamma^2 f)\left(1 + \frac{r_b^{2|l|}}{R_b^{2|l|}}\right)\left(1 - \frac{R_b^{2|l|}}{R^{2|l|}}\right).
\end{aligned}
$$

При $\epsilon_i = 1$ это уравнение переходит в полученное в /3/.

Рассмотрим случай оторванного от стенки волновода пучка, когда $\Delta \ll \delta = R - R_b$. В работе /3/ в пределе малых $y = |l|\Delta/R_b \ll 1$ и в отсутствие ионного фона $(f = 0,\ \epsilon_i = 1)$ был получен инкремент нарастания диокотронной неустойчивости и из условия $\operatorname{Im}\omega = u/L$ пороговый ток ее возникновения:

$$
\operatorname{Im}\omega = \omega_d[y(y - 2\Delta/R_b)]^{1/2},
$$

$$
I_D = 17(\gamma^2 - 1)(\Omega_e R_b \Delta/cL)[y(y - 2\Delta/R_b)]^{1/2}\ \text{kA}.
$$

Отсюда видно, что неустойчивыми оказываются азимутальные моды колебаний $|l| \geqslant 2$.

В пределе $y \gtrsim 1$, который в работе /3/ не рассматривался, имеем

$$\mathrm{Im}\,\omega = \omega_d[e^{-2y} - (y-1)^2]^{1/2},$$

$$I_D = 17(\gamma^2 - 1)(\Omega_e R_b \Delta/cL)e^y \text{ kA}.$$

Легко показать, что с максимальным инкрементом и минимальным пороговым током возбуждается мода с $l_0 \approx 0{,}8R_b/\Delta$:

$$(\mathrm{Im}\,\omega)_{max} \approx 0,45\omega_d, \quad (I_D)_{min} \approx 40(\Omega_e R_b \Delta/cL)(\gamma^2 - 1) \text{ кА}. \tag{3}$$

Отсюда видно, что с ростом Δ пороговый ток возрастает, т. е. при заданном токе диокотронная неустойчивость стабилизируется. Отметим также, что ток (3) меньше пирсовского, если

$$\kappa \approx 1/a \approx 4R_b\Delta\Omega_e/\gamma uL \approx 3R_b^2\Omega_e/l_0\gamma uL \ll 1.$$

Из полученных формул следует, что инкремент нарастания диокотронной неустойчивости при $y > 1$ экспоненциально падает, а пороговый ток ее возникновения, наоборот, экспоненциально растет.

При наличии ионного фона ($f \neq 0$), как показывает анализ дисперсионного уравнения (2), максимальный инкремент нарастания диокотронной неустойчивости с ростом $\gamma^2 f$ уменьшается (а пороговый ток растет) и при $\gamma^2 f \approx 1$ стремится к нулю. Однако при $f \neq 0$ в системе возможно развитие другой, токово-конвективной неустойчивости, обусловленной конечной инерцией ионов (т. е. $\epsilon_i \neq 1$). С ростом $\gamma^2 f$ ее инкремент возрастает и при определенном значении $\gamma^2 f$ эта неустойчивость станет доминирующей в системе, не говоря уже о том, что при $\gamma^2 f \geqslant 1$ только она и может развиваться.

Токово-конвективная неустойчивость, в отличие от диокотронной, носит абсолютный характер, поэтому для ее исследования удобно дисперсионное уравнение (2) разложить по степеням ω. Тогда соотношение $A(0) = 0$ для n_b определяет пороговый ток возникновения неустойчивости, а инкремент ее нарастания вблизи порога равен

$$\mathrm{Im}\,\omega = (\sqrt{3}/2)[B(0)\omega_{Li}^2/A(0)]^{1/3}.$$

Используя (2), из указанных соотношений находим пороговый ток развития токово-конвективной неустойчивости и инкремент ее нарастания

$$I_k = 17\ \frac{(\gamma^2-1)^{3/2}}{\gamma}\ \frac{M}{m}\ \frac{\Omega_i^2}{\omega_{Li}^2}\ \frac{k_z^2 R_b \Delta}{y}\ \text{kA},\quad \operatorname{Im}\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\ k_z u \left(\frac{\Omega_i^2}{\omega_{Li}^2 y}\right)^{1/3},$$

при $y \ll 1$,

(4)

$$I_k = 17(\gamma^2-1)\ \frac{\Omega_e R_b}{c}\ k_z \Delta\ \text{kA},\quad \operatorname{Im}\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k_z u}{2}\ \omega_{Li}^2\right)^{1/3},\ \text{при } y > 1.$$

При $y \ll 1$ как пороговый ток, так и инкремент нарастания токово-конвективной неустойчивости с ростом y падают и при $y \gtrsim 1$ выходят на независящие от l (при заданном Δ/R_b) значения.

В пределе $y \gtrsim 1$, если считать, что пороговые токи диокотронной и токово-конвективной неустойчивости одного порядка, то можно показать, что при $\gamma^2 f \gtrsim 1/2$ в системе будет доминировать токово-конвективная неустойчивость.

Далее рассмотрим устойчивость трубчатого РЭП, прижатого к стенке волновода, т. е. когда выполняется условие $\delta \ll \Delta$. В этом случае пороговый ток развития токово-конвективной неустойчивости и ее инкремент нарастания равны:

$$I_k = 17\ \frac{\gamma^2-1}{2y}\ \frac{R\Omega_e k_z \Delta}{c}\ \text{кА},\quad \operatorname{Im}\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y\ \frac{\omega_{Li}}{\Omega_i}\right)^{1/3}\omega_{Li},$$

при $y \ll 1$,

(5)

$$I_k = 17(\gamma^2-1)\ \frac{\Omega_e R_b k_z \Delta}{c}\ \text{кА},\quad \operatorname{Im}\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(k_z u \omega_{Li}^2\right)^{1/3},\ \text{при } y \gg 1.$$

Сравнивая выражения (4) и (5), находим, что при $y \ll 1$ пороговый ток в случае оторванного от стенки пучка с уменьшением δ увеличивается и достигает своего максимального значения для прижатого к стенке пучка, которое в $R/l\delta \gg 1$ раз больше, чем в случае пучка, оторванного от стенки. При $y \gtrsim 1$ как пороговые токи, так и инкременты неустойчивости в обоих случаях одного порядка.

Следует отметить, что если в случае оторванного от стенки волновода пучка моды с малым l (при заданном Δ/R_b) обладали бо́льшим пороговым током и бо́льшим инкрементом, и, в зависимости от величины тока РЭП, могли возбуждаться те или другие, то в случае прижатого к стенке пучка всегда возбуждаются моды с большим l, так как они имеют по сравнению с модами с малым l минимальный пороговый ток и максимальный инкремент.

Авторы благодарят А. А. Рухадзе, обратившего их внимание на данную задачу и сделавшего ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелков П. С., Шкварунец А. Г. Тезисы докладов IV Всесоюзного семинара по релятивистской высокочастотной электронике. М., МГУ, 1984, с. 76.
2. Карбушев Н. И., Рухадзе А. А., Удовиченко С. Ю. Физика плазмы, **10**, 268 (1984).
3. Карбушев Н. И., Рухадзе А. А., Удовиченко С. Ю. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, 50 (1983).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 26 июня 1985 г.
После переработки 16 сентября 1985 г.