Краткие сообщения по физике № 12 1983

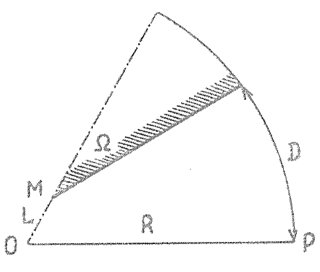
АППРОКСИМАЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СЕКТОРНОГО ЦИКЛОТРОНА

Ю. К. Хохлов

УДК 621.384.6

Аналитический метод применяется для описания магнитного поля секторного циклотрона определенного типа. Результаты вычислений совпадают с измеренным полем секторного циклотрона ИЯИ с точностью 0,5–1,5%.

Циклотрон рассматриваемого типа характеризуется геометрическими параметрами N, G, L, Ω, где N – число магнитных секторов; $2G$ – вертикальный зазор между полюсами магнитов; L, Ω – см. на рис. 1.



Р и с. 1. План полупериода магнитной системы циклотрона

Пусть R, Θ, z – цилиндрическая система координат с центром 0 и полярной осью OP; R – окружность радиуса R с центром 0. Расстояние D, отсчитываемое вдоль R, равно $D = R(\pi/N - \Omega + \arcsin((L/R)\sin\Omega))$.

Нас интересует $H(R, \Theta)$ – вертикальная составляющая магнитного поля на R. Для аппроксимации H в работах /I–4/ введена функция, являющаяся точным решением некоторой двумерной задачи. Эта функция $f(x)$ определяется как решение трансцендентного уравнения

$$x = a\,\mathrm{arctg}\sqrt{f^2 - 1} + \mathrm{arth}(\sqrt{f^2 - 1}/a), \qquad (I)$$

в котором $x = \pi R\Theta/2G$; $a = D/G$ (наши обозначения и нормировка величин x и f отличаются от основной работы /3/). Очевидно, что $f(0) = 1$, $f(\infty) = b$, где $b = (a^2 + 1)^{1/2}$. При больших x $f(x)$ может быть представлена паде-разложением по степеням $\exp(-2x)$:

$$\varepsilon(x) = 2a^2/\left[5a^2 + 1 + b^2\exp(2x - 2\sigma)\right], \qquad (2)$$
$$\sigma = a\,\mathrm{arctg}\,a, \quad f(x) = b(1 - \varepsilon(x)).$$

Соотношение между H и f запишем в виде

$$H(R, \Theta) = C\left[f(x) + f(2x_4 - x) - b\right] \approx C\left[f(x) - b\varepsilon(2x_4 - x)\right], \qquad (3)$$

где x_4 – координата середины магнита. Малая поправка $b\varepsilon(2x_4 - x)$ обеспечивает существование максимума H в точке x_4 и практически не влияет на результат вдали от x_4.

Постоянная C определяется по экспериментальному значению H в какой-либо одной точке Θ_c на окружности R. Если $\Theta_c = \Theta_1 = 0$, то $f(x_c) = 1$ и $C = H(R, 0)$. (Поправка $b\varepsilon(2x_4 - x)$ в точке $x = 0$ пренебрежимо мала.) Если же $\Theta_c = \Theta_4$, то $f(x_c) = b(1 - \varepsilon(x_4))$ и $C = H(R, \Theta_4)/b(1 - 2\varepsilon(x_4))$.

Решение уравнения (I). Выразим $f(x)$ через вспомогательную функцию $u(x)$: $f(x) = 1/\cos(u(x)/a)$. Очевидно, что $u(0) = 0$, $u(\infty) = \sigma$. Уравнение для $u(x)$, вытекающее из (I), следует писать в виде

$$\mathrm{tg}(u/a) - a\,\mathrm{th}(u - x) = 0. \qquad (4)$$

При фиксированном x величина $u(x)$ находится из (4) методом Ньютона. Подходящим нулевым приближением для $u(x)$ является функция

$$u_0(x) = \frac{A}{2\omega} \ln \frac{\mathrm{ch}(\omega(x + x_3))}{\mathrm{ch}(\omega(x - x_3))}, \qquad (5)$$

в которой постоянные A, ω определяются из условия совпадения $u_0(x)$ с $u(x)$ в точках x_3 и ∞; x_3 – точка экстремума функции $u'(x)$: $u'''(x_3) = 0$; ω находится итерациями, начинающимися с $\omega_0 = 1$.

Таблица I.

Величины $\delta H = H_{exp} - H_{cal}$ (в эрстедах), вычисленные по алгоритмам I, II и гармоникам 0,3,6,9 фурье-разложения (IУ)

Θ град	R = 16 см				R = 21 см			
	H_{exp}, Э	δH_I	δH_{II}	δH_{IV}	H_{exp}, Э	δH_I	δH_{II}	δH_{IV}
0	I257	62	0	-2II	985	5	0	-223
2	I26I	62	0	-I94	990	6	I	-202
4	I274	62	0	-I46	I002	6	I	-I47
6	I294	6I	-I	-75	I023	7	I	-64
8	I325	62	-2	II	I054	8	2	35
I0	I366	63	-2	99	I095	9	3	I3I
I2	I4I9	63	-3	I75	II49	II	4	2I0
I4	I486	64	-4	226	I2I9	I4	6	256
I6	I569	63	-6	24I	I306	I6	6	254
I7	I673	64	-8	2I4	I4I7	I7	6	I99
20	I80I	62	II	I43	I558	I7	4	9I
22	I964	62	I2	38	I743	I9	I	-57
24	2I70	62	I2	-89	I989	2I	-I	-220
26	2434	64	8	-2I5	2325	27	-2	-356
28	2772	64	0	-308	279I	39	0	-407
30	3207	66	I7	-33I	3427	52	I	-3I2
32	3749	64	4I	-254	42I6	33	-27	-6I
34	4366	40	55	-9I	5023	-30	-85	232
36	4982	-4	46	I0I	5657	-63	-95	40I
38	550I	-38	28	240	6028	-35	-49	373
40	5864	-37	I9	278	6I89	-7	-I2	2I3
42	6073	-2I	I5	224	624I	-I	-3	29
44	6I75	-I0	II	I26	6255	-2	-3	-I09
46	6220	-5	6	33	6258	-3	-4	-I8I
48	6238	-4	I	-34	6260	-3	-3	-I89
50	6247	-2	I	-66	626I	-2	-3	-I50
52	625I	-I	0	-72	6263	0	-I	-8I
54	6252	-I	-I	-63	6263	0	-I	-4
56	6253	0	-I	-46	6264	0	0	66
58	6254	0	0	-3I	6264	0	0	II4
60	6254	0	0	-26	6264	0	0	I3I

Аппроксимация. Очевидно, что $f(x)$ можно рассматривать как интерполирующую функцию, позволяющую вычислять поле для любого Θ по значениям в немногих Θ. Такой подход реализован в настоящей работе в трех вариантах.

I. Интерполяция по одной точке: задано $H(R, \Theta_4)$, C находится по точке Θ_4. Параметры G, L, Ω берутся номинальные.

П. Интерполяция по трем точкам: заданы $H(R, 0)$, $H(R, \Theta_2)$, $H(R, \Theta_4)$; Θ_2 – промежуточная точка. C находится в точке $\Theta = 0$. Применяются итерации, начинающиеся со значений $b_0 = H(R, \Theta_4)/H \times (R, 0)$, $\varepsilon(2x_4 - x_2) = 0$.

Ш. Интерполяция по двум точкам и среднему полю: заданы $H(R, 0)$, $H(R, \Theta_4)$, $\langle H(R, \Theta)\rangle$. Остальное сходно с П. Метод аналитического вычисления интеграла от $f(x)$ см. в /4/.

При данном R расчет по варианту П или Ш дает эффективные значения параметров G и a. Для получения эффективных значений Ω и L используются результаты расчетов для двух соседних значений R.

Таблица 2.

Эффективные значения параметров G, L, $\Omega^* = \Omega_{cal} - 33°$, вычисленные по варианту Ш.

R, см	I6	I7	I8	I9	20	2I	22	23	24	25	26
G, см	2,I2	2,09	2,07	2,04	2,03	2,0I	I,99	I,97	I,95	I,92	I,98
L, см	5,I4	5,2I	5,27	5,32	5,3I	5,26	5,24	5,28	5,37	5,46	5,49
Ω^*, град	0,I9	0,37	0,54	0,64	0,62	0,52	0,47	0,56	0,72	0,85	0,90

Типичные результаты, относящиеся к малому секторному циклотрону ИЯИ с $N = 3$, $G = 2$ см, $L = 5$ см, $\Omega = 33°$ для $\Theta_2 = 28°$, приведены в табл. I и 2. Для сравнения в табл. I приведены также результаты расчета поля по четырем известным гармоникам фурье-разложения (IУ). Из табл. I видно, что интерполяция по трем точкам дает точность 0,5–I,5%, что вполне достаточно для расчетов динамики частиц. Практически это означает, что измерения поля с шагом 2° могут быть заменены на измерения с шагом 30°.

Институт ядерных исследований
АН СССР.

Поступила в редакцию
30 апреля I983 г.

Литература

1. Г. Н. Вялов, Препринт ОИЯИ, Дубна, 1961 г.
2. В. Н. Канунников, ЖТФ, 33, 592 (1963).
3. В. А. Пападичев, Препринт ФИАН № 69, М., 1969 г; Краткие сообщения по физике ФИАН № 4, 61 (1970).
4. В. Н. Канунников, Препринт ФИАН № 21, М., 1969 г; Краткие сообщения по физике № 3, 33 (1970).