Краткие сообщения по физике № 3 1982

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Ю. А. Кухаренко, С. Г. Тиходеев

УДК 536.7

Для систем с непрерывным спектром доказан принцип ослабления корреляций. Получены интегральные уравнения для функций Грина, полностью описывающие кинетическую и гидродинамическую стадию процессов релаксации.

В работе Л. В. Келдыша /I/ построена диаграммная техника для неравновесных процессов в системах, выведенных из состояния равновесия внешним полем. В настоящей работе эта техника обобщена для описания необратимого процесса релаксации произвольно заданной в начальный момент времени матрицы плотности $\rho(t_o)$ к состоянию равновесия в отсутствии внешних полей. Для этой цели, следуя Холлу /2/, представим функцию Грина неравновесной пространственно однородной бозе- или ферми-системы в виде ряда по степеням взаимодействия:

$$G(1,1') = -i\langle T\psi(1)\psi^+(1')\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\int\left\{\prod_{k=2}^{2n+1}dkdk'\right\}\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=2}^{2n}V(k',k'+1;\,k,k+1)\right\}\left\{\prod_{k=1}^{2n+1}G_o(k,k') +\right.$$

$$+\sum_{i<j}g_o'(i,j;\,i',j')\prod_{k\neq i,j}^{2n+1}G_o(k,k') +$$

$$+\sum_{i<j<l} g_0^{\prime}(i,j,l;\, i^{\prime},j^{\prime},l^{\prime}) \prod_{k\neq i,j,l}^{2n+1} G_0(k,k^{\prime}) + \ldots \tag{I}$$

$$\ldots + g_0^{\prime}(1,\ldots 2n+1;\, 1^{\prime},\ldots 2n^{\prime}+1)\Big\},$$

где $k \equiv (t_k, p_k)$, $k^{\prime} \equiv (t_k^{\prime}, p_k^{\prime})$, $p = (\vec{p}, \sigma)$ — совокупность импульса и спина частицы, $\int dk \equiv \int_c dt_k \int \frac{d\vec{p}_k}{(2\pi)^3} \sum_\sigma$, интегрирование по времени производится по контуру c, идущему от начального момента t_0 до $t_m = \max\{t_1 t_1^{\prime}\}$ и обратно; $V(i,j;\, i^{\prime},j^{\prime}) = V(p_i p_j;\, p_i^{\prime} p_j^{\prime})(2\pi)^3 \delta(\vec{p}_i + \vec{p}_j - \vec{p}_j^{\prime} - \vec{p}_i^{\prime}) \delta_c(t_i - t_j) \delta_c(t_i - t_i^{\prime}) \times \delta_c(t_j - t_j^{\prime})$ — потенциал парного взаимодействия частиц, δ_c — дельта-функция, действующая на контуре c, $G_0(k,k^{\prime})$ — функция Грина системы без взаимодействия, определяемая функцией распределения частиц по импульсам в начальный момент времени $f(p,t_0)$. Функции

$$g_0^{\prime}(1\ldots n;\, 1^{\prime}\ldots n^{\prime}) = \exp\Big\{ i \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\vec{p}_k^{\prime}) t_k^{\prime} - \varepsilon(\vec{p}_k) t_k +$$

$$+ i t_0 \sum_{k=1}^{n} \left[\varepsilon(\vec{p}_k^{\prime}) - \varepsilon(\vec{p}_k)\right]\Big\} (2\pi)^3 \delta\left(\sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k - \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k^{\prime}\right) \times \tag{2}$$

$$\times g^{\prime}(p_1 \ldots p_n;\, p_1^{\prime} \ldots p_n;\, t_0), \quad \varepsilon(\vec{p}) = \vec{p}^2/2m, \quad n = 2,3, \ldots .$$

описывают начальные корреляции в системе, определяемые неравновесной матрицей плотности $\rho(t_0)$. Наличие таких корреляций не позволяет воспользоваться теоремой Вика и записать выражение (I) в виде симметризованного произведения одночастичных функций Грина. Важно отметить, что корреляционные функции (2), в отличие от функции Грина G_0, содержат явную осциллирующую зависимость от начального момента времени t_0. Это обстоятельство приводит к тому, что при весьма общих условиях вклад начальных корреляций (2) в разложение (I) при $t_0 \to -\infty$ для систем с непрерывным спектром (в частности, для макроскопических систем в статистическом пределе) становится пренебрежимо малым. В самом деле, предполагая интегрируемость функций $g'(p_1 \ldots p_k; p_1' \ldots p_k'; t_0)$ и используя теорему Римана – Лебега, убеждаемся, что все интегралы по импульсам в выражении (I), содержащие $g'(p_1 \ldots p_k; p_1' \ldots p_k'; t_0)$, стремятся к нулю при $t_0 \to -\infty$. Оценки показывают, что исчезновение начальных корреляций происходит на интервале времени τ_c, имеющем порядок обратной ленгмюровской частоты в случае плазмы, времени взаимодействия пары частиц в случае газа и времени установления локального равновесия в случае жидкости. Отсюда вытекает применимость теоремы Вика для кинетической и гидродинамической стадий релаксационых процессов. Доказанный здесь принцип ослабления начальных корреляций постулировался ранее в виде граничных условий Н. Н. Боголюбова /3/, в виде гипотезы случайных фаз в работе Ван Хова /4/ и в виде адиабатической гипотезы в работе В. Л. Березинского /5/. В этих работах фактически принимались условия $g'(p_1 \ldots p_k; p_1' \ldots p_k'; t_0) = 0$, $k = 2, 3, \ldots$. Подчеркнем, что исчезновение начальных корреляций обусловлено не их малостью, а фазовым перемешиванием, происходящим в системе с непрерывным спектром, величина же корреляций в начальный момент времени может быть сколь угодно велика. Принцип ослабления корреляций позволяет непосредственно распространить диаграммную технику Л. В. Келдыша /I/ для описания релаксационных процессов. В результате мы приходим к системе интегральных уравнений Л. В. Келдыша для запаздывающей G^r и опережающей G^a функций Грина, и для двухвременной корреляционной функции F, явным образом содержащей функцию распределения частиц по импульсам $f(p, t_0)$:

$$G^r = G_0^r + G_0^r \Sigma^r G^r, \quad G^a = G_0^a \Sigma^a G^a, \qquad (3)$$

$$F = F_0(1 + \Sigma^a G^a) + G_0^r(\Omega G^a + \Sigma^a F), \qquad (4)$$

с тем отличием, что интегрирование по времени производится в интервале (t_0, t_m). В работе /I/ утверждается, что член, содержащий F_0 в уравнении (4), тождественно равен нулю. Это утверждение справедливо для установившегося вынужденного решения, описывающего отклик системы на внешнее поле. В рассматриваемом нами случае задачи Коши этот член, однако, не только не выпадает, но играет ведущую роль. Непосредственные итерации уравнений (3), (4) приводят к функциям Грина, зависящим от разности времен, и не описывают необратимого процесса релаксации системы к состоянию равновесия. Более того, разложение функций Грина в ряд по теории возмущений приводит к секулярным членам, расходящимся на больших временах порядка времени релаксации. В конечном счете эти расходимости обусловлены тем, что в неравновесном случае функции Грина содержат малый параметр ε не только в явном виде, но и в виде произведения εt:

$$G(t,t',\varepsilon) = G\left(t - t',\ \varepsilon\,\frac{t + t'}{2},\ \varepsilon\right). \qquad (5)$$

Н. Н. Боголюбов /3/ показал, что эти расходимости можно устранить, если исключить $f(p,t_0)$ и выразить все величины через медленно меняющуюся функцию распределения $f(p,t)$ в текущий момент времени. Используя результаты В. Л. Березинского /5/, можно показать, что для этой цели достаточно просуммировать все сингулярные диаграммы, имеющие вставки в линии F_0. Другими словами, можно опустить все диаграммы, содержащие сингулярные вставки в линии F_0, а в оставшихся диаграммах заменить $f(p,t_0)$ на $f(p,t_m)$. Указанную перенормировку функции распределения можно произвести в аналитическом виде. В результате получаем уравнение, заменяющее уравнение (4):

$$F(t<t') = -i\left[1 + 2\eta f(p,t')\right]\exp\left[i\varepsilon_p(t' - t)\right] + \qquad (6)$$

$$+\iint_{t_0}^{t} dt_1 dt_2 G_0^a(t,t_1)\left[\Omega(t_1,t_2)G^a(t_2,t') + \Sigma^r F\right],$$

где $\eta = 1$ в случае статистики Бозе, $\eta = -1$ в случае статистики Ферми. Уравнение для $F(t>t')$ можно получить комплексным сопряжением (6) и заменой $t \rightleftarrows t'$. Уравнение (6) отличается от (4) во-первых, заменой $f(p,t_0)$ на $f(p,t_m)$ и, во-вторых, появлением G_0^a вместо G_0^r в интегральном члене.

Система уравнений (3), (6) содержит величины, зависимость которых от времени явным образом определяется функцией распределения частиц в текущий момент времени, и позволяет полностью описать кинетическую и гидродинамическую стадии процессов релаксации. Решение этих уравнений удовлетворяет условию согласования, роль которого играет кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(p,t) = (1/2) \int_{t_0}^{t} dt' \left[G^r(t,t')\Omega(t',t) - \Omega G^a + F\Sigma^a - \Sigma^r F \right]. \tag{7}$$

Это уравнение может быть получено с любой степенью точности путем непосредственных итераций системы (3), (6). Отметим, что до тех пор, пока нижний предел интегрирования t_0 в вершинах диаграмм остается конечным, система уравнений (3), (6), (7) является обратимой в согласии с обратимым характером исходных уравнений квантовой механики. Можно показать, что необратимость возникает только как асимптотическое свойство в пределе $t_0 \to -\infty$.

Поступила в редакцию
5 ноября 1981 г.

Литература

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 47, 1515 (1964).
2. A. G. Hall, J. Phys. A: Math. Gen., 8, 214 (1975).
3. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Избранные труды, т. 2, изд. "Наукова Думка", Киев, 1974 г.
4. L. Van Hove, Physica, 21, 517 (1955).
5. В. Л. Березинский, ЖЭТФ, 53, 203 (1967).