

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. А. Кузаренко, С. Г. Тиходеев

УДК 536.7

Проведена перенормировка диаграммного ряда для n -частичных функций Грина, позволяющая исключить секулярные расходимости и получить замкнутую систему кинетических уравнений для корреляционных функций, описывающих долгоживущие корреляции в неравновесной системе.

Диаграммная техника Келдыша для релаксационных процессов /1/ применима, если выполнен принцип ослабления корреляций, согласно которому существует характерный интервал времени τ_c , малый по сравнению с временем релаксации τ_r , на котором вклад корреляций между частицами, возникших вследствие возмущения системы в начальный момент времени, исчезает /2/.

В настоящей работе диаграммная техника обобщается на случай систем, для которых этот принцип не выполняется. Примером таких систем являются турбулентная жидкость, системы вблизи точки фазового перехода второго рода и т.д. К ним можно отнести также любую систему частиц в конечном объеме, если нас специально интересует вклад флуктуаций. В этих случаях интервал времени τ_c , на котором изменяются корреляционные функции, оказывается сравнимым с временем релаксации системы к состоянию равновесия τ_r . Из-за наличия долгоживущих корреляций замкнутое кинетическое уравнение для функции распределения частиц по импульсам не существует, и неравновесный процесс необходимо описывать системой уравнений для корреляционных функций. Последние определяются с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}
f(p_1 \dots p_s, p'_1 \dots p'_s, t) = & \gamma(1 \dots s) \left\{ \prod_{k=1}^s f(p_k p'_k t) + \right. \\
& + \sum_{i < j} g^s(p_i p_j, p'_i p'_j) \prod_{k \neq i, j} f(p_k p'_k t) + \\
& + \sum_{i < j < l} g^s(p_i p_j p_l, p'_i p'_j p'_l, t) \prod_{k \neq i, j, l} f(p_k p'_k t) + \dots + \\
& \left. + g^s(p_1 \dots p_s, p'_1 \dots p'_s, t) \right\}, \\
& s = 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{I}$$

где $f(p_1 \dots p_s, p'_1 \dots p'_s, t) = \langle \psi^\dagger(p'_1 t) \dots \psi^\dagger(p'_s t) \psi(p_s t) \dots \psi(p_1 t) \rangle$ - s -частичные неравновесные функции распределения бозонов или фермионов, $\gamma(1 \dots s)$ - оператор симметризации, действующий на нестрихованные аргументы, $p = (\vec{p}, \sigma)$ - совокупность импульса и спина частицы. Следуя работе Холла /3/, запишем s -частичную функцию Грина в виде ряда по степеням взаимодействия:

$$\begin{aligned}
G(1 \dots s, 1' \dots s') &= (-i)^n \langle T \psi(1) \dots \psi(s) \psi^\dagger(s') \dots \psi^\dagger(1') \rangle = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \left| \left| \prod_{k=s+1}^{s+2n+1} d_k d_{k'} \right| \left| \prod_{k=s+1}^{s+2n} V(k'', k''+1; k, k+1) \right| \right| \times \\
&\times \left\{ \prod_{k=1}^{s+2n+1} G_0(k, k'') + \sum_{i < j} g_0^s(i, j, i' j') \prod_{k \neq i, j}^{s+2n+1} G_0(k, k'') + \right. \\
&+ \sum_{i < j < l} g_0^s(i, j, l, i' j' l') \prod_{k \neq i, j, l}^{s+2n+1} G_0(k, k'') + \dots + \\
&\left. + g_0^s(1 \dots s+2n+1; 1' \dots 1'+2n'+s') \right\},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $k \equiv (t_k, p_k)$, $k' \equiv (t'_k, p'_k)$, $\left[dk \equiv \int_c dt_k \right] d\vec{p}_k (2\pi)^{-3} \sum_{\sigma_k}$, ин-

тегрирование по времени производится по контуру c , идущему от начального момента t_0 до $t_m = \max\{t_1 \dots t_S, t'_1 \dots t'_S\}$ и

обратно; $V(ij, i'j') = V(p_i p_j, p'_i p'_j) (2\pi)^3 \delta(p_i + p_j - p'_i - p'_j) \delta_c(t_i - t_j) \delta_c \times (t_i - t'_i) \delta_c(t_j - t'_j)$ - потенциал парного взаимодействия частиц; δ_c - дельта-функция, действующая на контуре c , $G_0(k, k')$ - одночастичная функция Грина системы без взаимодействия, определяемая матрицей плотности $\rho(t_0)$ в начальный момент времени. Функции

$$g_0^{\sigma}(1 \dots n, 1' \dots n') = \exp \left[i \sum_{k=1}^n [\varepsilon(p'_k)(t_k - t_0) - \varepsilon(p_k)(t_k - t_0)] \right] \times$$

$$\times g^{\sigma}(p_1 \dots p_n, p'_1 \dots p'_n, t_0) \quad (3)$$

($n = 2, 3 \dots$, $\varepsilon(\vec{p}) = \vec{p}^2/2m$) определяют корреляции между частицами, возникающие в неравновесной системе в начальный момент времени. В работе /3/ показано, что диаграммную технику Келдыша можно обобщить, если к каждой диаграмме добавить совокупность диаграмм, содержащих корреляторы (3). Эти диаграммы получаются из фейнмановской, если пометить те линии, которые входят в коррелятор. Однако принципиальным недостатком этой техники является то, что она содержит функции корреляций в начальный момент времени t_0 . По этой причине все итерации содержат секулярные члены, расходящиеся на больших временах порядка времени релаксации, в связи с чем диаграммный ряд (2) не имеет физического смысла. Мы покажем, что диаграммный ряд теории возмущений можно перестроить таким образом, что все секулярные расходимости будут устранены и все величины будут выражены через корреляционные функции в текущий момент времени. Отметим, что число долгоживущих корреляций относительно мало. Можно показать, что в общем случае долгоживущими являются корреляторы $g^{\sigma}(p_1 \dots p_S, p_1 + k_1 \dots p_S + k_S, t)$ с малыми волновыми числами k_i , осталь-

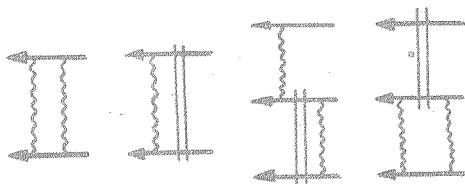
ные затухают на временах, малых по сравнению с временем релаксации, и не дают вклада. Перейдем к матричному представлению /1/ и подействуем слева и справа на функцию Грина (2) соответственно матрицами $R^{-1}(1 \dots s) = R^{-1}(1) \otimes \dots \otimes R^{-1}(s)$ и $R(1' \dots s') = R(1') \otimes \dots \otimes R(s')$, где \otimes - знак тензорного произведения матриц

$$R(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Это преобразование оставляет выражение (2) инвариантным; входящие в него величины записываются в виде следующих матриц:

$$G_0 = \begin{pmatrix} 0 & G_0^A \\ G_0^R & F_0 \end{pmatrix}, \quad G_0' = G'(t_0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где G_0^R , G_0^A - запаздывающая и опережающая функции Грина, F_0 - введенная в работе Келдыша /1/ двухвременная корреляционная функция, содержащая функцию распределения частиц по импульсам. Существенно, что матрица любого коррелятора (5) имеет единственную отличную от нуля компоненту. Введем следующие определения. Будем называть корреляционной вставкой s -го порядка блок α_s , $s = 2, 3, \dots$ не распадающийся на произведение отдельных частей и имеющий s входных и s выходных линий с внешними индексами 2, которые могут входить или не входить в коррелятор, не захватывающий линий остальной части диаграммы ρ . Примеры корреляционных вставок 2-го и 3-го порядка показаны на рисунке:



*) Вставка 1-го порядка, т.е. вставка в линию, приводит к расходимостям, рассмотренным в /2/.

Можно показать, что все диаграммы с корреляционными вставками и только они содержат секулярные расходимости. Как и в /2/, можно выделить сингулярные и регулярные части корреляционных вставок. Назовем диаграмму сокращенной, если она не содержит сингулярных корреляционных вставок. Имеют место следующие теоремы (доказательства для краткости опускаем):

Теорема 1. s -частичные корреляционные функции $g^*(p_1 \dots p_s, p'_1 \dots p'_s, t)$ определяются суммой всех сингулярных корреляционных вставок s -ого порядка в s -частичную функцию Грина $G(1 \dots s, 1' \dots s')$.

Теорема 2. s -частичные функции Грина определяются суммой всех сокращенных диаграмм, в которых корреляторы в начальный момент времени t_0 заменены корреляционными функциями в текущий момент времени t_m .

Теорема 2 позволяет построить диаграммную технику с учетом долгоживущих корреляций, не содержащую секулярных расходимостей, и выразить все физические величины в виде функционалов от корреляционных функций в текущий момент времени. Теорема 1, в свою очередь, приводит к существованию замкнутых кинетических уравнений для корреляционных функций, которые играют роль условий согласования для построенной диаграммной техники. Эти уравнения можно записать в виде

$$i \frac{\partial}{\partial t} g^*(p_1 \dots p_s, p'_1 \dots p'_s, t) = \left[\left[G_0^{-1}(1) + \dots + G_0^{-1}(s) \right] \times \right. \\ \left. \times g^*(1 \dots s, 1' \dots s') - G^*(1 \dots s, 1' \dots s') \right] \times \\ \times \left[G_0^{-1}(1') + \dots + G_0^{-1}(s') \right] \Big|_{t_1 = \dots = t'_s = t}, \quad (6)$$

где $G^*(1 \dots s, 1' \dots s')$ определяется диаграммным рядом для функции $G(1 \dots s, 1' \dots s')$, в котором опущены все графики, отличающиеся перестановкой аргументов $1 \dots s$ и оставлены только неприводимые диаграммы, не распадающиеся на произведение двух или более диаграмм. Система уравнений (6) позволяет полностью описать влияние флуктуаций на кинетику системы. Во избежание недоразумений отметим, что она отличается от известной цепочки уравнений Боголю-

бова /4/ следующими обстоятельствами: 1) уравнения (6) имеют место для долгоживущих корреляций; 2) эти уравнения годятся только на больших временах, сравнимых с временем релаксации системы к состоянию равновесия; 3) уравнения (6) представляют собой замкнутую систему уравнений, правые части которых являются функционалами от корреляционных функций и могут быть вычислены с любой степенью точности с помощью диаграммной техники.

Поступила в редакцию
24 ноября 1981 г.

Л и т е р а т у р а

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 47, 1515 (1964).
2. Ю. А. Кухаренко, С. Г. Тиходеев, Краткие сообщения по физике ФИАН № 3, 21 (1982).
3. A. G. Hall, J. Phys. A: Math. Gen., 8, 214 (1975).
4. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Избранные труды, т. 2, Изд. "Наукова Думка" Киев, 1970 г.