Краткие сообщения по физике № 10 1982

# О ДВИЖЕНИИ СОЛИТОНОВ И БРИЗЕРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

Ф. Х. Абдуллаев

УДК 530.I

Рассмотрено движение солитонов уравнения Sin-Gordon и нелинейного уравнения Шредингера, а также бризеров в поле случайных сил. Найден закон стохастического ускорения солитонов и бризеров.

I. При рассмотрении динамики солитонов в ряде задач теории конденсированного состояния возникает проблема изучения влияния шумового поля на солитоны. К ней относятся задачи распространения уединенных волн в плазме и жидкостях с флуктуирующими параметрами и шумовыми распределены источниками /I/, /2/, динамики солитонов в твердых телах при учете тепловых и пространственных флуктуаций /3/, /4/ и ряд других. В работе /I/ (см. также /2/, /5/) рассмотрено движение солитонов Кортевега - де Вриза (КдВ) под действием случайных $\delta$-коррелированных во времени сил и показано, что солитоны ведут себя как частицы в поле случайных сил и стохастически ускоряются. Представляет интерес рассмотреть аналогичную задачу для солитонов, представляющих собой солитоны огибающей нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и случая бризеров - связанных состояний солитонов и антисолитонов уравнения Sin-Gordon, имеющих спектр частот $0 \leqslant \omega_B \leqslant \omega_0$.

2. Рассмотрим движение солитона НУШ под действием внешней $\delta$-коррелированной случайной силы. Случай параметрически действующей силы изучен в работе /5/. Исходное уравнение имеет вид

$$iq_t + q_{xx} + 2q^2q^* = \varepsilon F(x,t), \qquad (I)$$

где $F(x,t)$ – гауссова случайная сила с коррелятором

$$\langle F(x,t)\rangle = 0, \quad \langle F(x,t)F(y,\ t+\tau)\rangle = 2\sigma_F^2\delta(x-y)\delta(\tau). \qquad (2)$$

Вычислим вначале среднеквадратичное изменение энергии солитона $\langle[H(t) - H(0)]^2\rangle$. Используем для этого модифицированный закон сохранения

$$\frac{dH}{dt} = 2\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} F_x \operatorname{Im} q_x dx - 4\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} F|q|^2 \operatorname{Im} q dx, \qquad (3)$$

где $H$ – гамильтониан НУШ /7/

$$H = \int_{-\infty}^{\infty}(-|q_x|^2 + |q|^4)dx. \qquad (4)$$

Из уравнения (3) находим

$$\langle[H(t) - H(0)]^2\rangle = \varepsilon^2\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2 \iint_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \langle F(x_1,t_1)F(x_2,t_2)\rangle \times$$

$$\times g(x_1,t_1)g(x_2,t_2), \quad g = \operatorname{Im} q_{xx} + 2|q|^2 \operatorname{Im} q, \qquad (5)$$

где $q(x,t)$ при $\varepsilon = 0$ определяется следующим выражением:

$$q(x,t) = 2i\eta\exp\left[-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t\right]/\operatorname{ch}\left[2\eta(x - x_0 + 4\xi t)\right]. \qquad (6)$$

Рассмотрим вначале случай покоящегося солитона ($\xi = 0$). Тогда, подставляя (2) и (6) в (5), получаем

$$\langle[\Delta H]^2\rangle = 8^2\sigma_F^2\varepsilon^2\eta^5\left[t + (1/8\eta^2)\sin(8\eta^2 t)\right]. \qquad (7)$$

Из (7) следует, что под действием силы $F(x,t)$ происходит стохастическое увеличение энергии солитона НУШ. В отличие от результата для солитона Кортевега – де Вриза /I/, где наблюдается линейный рост по $t$, в нашем случае имеется дополнительная периодическая зависимость от параметра $\delta = 8\eta^2 t$. Проанализируем предельные случаи больших и малых $\delta$.

а) $\delta \ll 1$, тогда из (7) имеем:

$$\langle [\Delta H]^2 \rangle \simeq 128\sigma_F^2 \varepsilon^2 \eta^5 t \left(1 - \frac{16}{3}\eta^4 t^2\right). \qquad (8)$$

б) $2\eta^2 t \gg 1$, тогда

$$\langle [\Delta H]^2 \rangle \simeq 8^2 \sigma_F^2 \varepsilon^2 \eta^5 t. \qquad (9)$$

Как следует из (7), (8) в начальной стадии ускорения имеются осцилляции коэффициента диффузии, до значений

$$D = 2D_\infty, \quad D_\infty = \langle [\Delta H]^2 \rangle / t, \quad t \gg \tau_c.$$

Найдем далее изменение импульса

$$P = i \int_{-\infty}^{\infty} q q_x^* dx. \qquad (10)$$

Имеем

$$\frac{dP}{dt} = 2\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} F(x,t) \operatorname{Re} q_x^*(x,t) dx. \qquad (11)$$

Вычисляя, находим, что

$$\langle [\Delta P^2] \rangle = (2^6/3)\sigma_F^2 \varepsilon^2 \eta^3 \left[t - \sin(8\eta^2 t)/8\eta^2\right]. \qquad (12)$$

3. Перейдем к рассмотрению динамики решений уравнения Sin-Gordon под действием случайных внешних сил.

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} + \omega_0^2 \sin\varphi = \varepsilon F(x,t) - \Gamma \varphi_t. \qquad (13)$$

Здесь $c_0$ - предельная скорость, $\omega_0$ - характерная частота, $\Gamma$ - затухание. Уравнение (13) появляется при изучении движений дислокаций в поле тепловых флуктуаций /4/, учете влияния термостата на магнитные солитоны и ряде других /6/. Здесь мы остановимся на изучении динамики бризеров - решений (I3) при $F = \Gamma = 0$, представляющих собой связанное состояние солитона и антисолитона. Решение имеет вид /7/, /8/

$$\varphi_B = 4\operatorname{arctg}\left\{\frac{\operatorname{tg}\nu \sin[(\cos\nu)(t - t_0)]}{\operatorname{ch}[(\sin\nu)(z - z_0)]}\right\}. \qquad (I4)$$

Часть гамильтониана, соответствующая возмущению $F$, имеет вид

$$H_F = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} F(z,t)\varphi_B(z,z_0,t)dz. \qquad (I5)$$

Уравнение движения, следующее из (I5), есть

$$d\beta/dt = -\partial H/\partial z_0 = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} F(z,t)(\partial\varphi_B/\partial z_0)dz, \qquad (I6)$$

где $\beta$ - скорость. Отсюда находим среднеквадратичную поправку к скорости бризера

$$\langle\Delta\beta^2\rangle = (\varepsilon^2/16)\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{t}dt_2\iint_{-\infty}^{\infty}dz_1dz_2\langle F(z_1,t_1)F(z_2,t_2)\rangle\times$$
$$\times(\partial\varphi_{B1}/\partial z_0)(\partial\varphi_{B2}/\partial z_0). \qquad (I7)$$

Рассмотрим далее случай частот и времен, когда выполняется условие (см. также /8/) $\operatorname{tg}^2\nu\sin^2[(\cos\nu)t] \ll 1$. Вычисляя интегралы в (I7) с учетом этого ограничения, получаем закон

$$\langle\Delta\beta^2\rangle = (64/3)\sigma_F^2\nu^2(t/2 - \sin 2t/4), \qquad (I8)$$

аналогичный для солитона НУШ (.7). При малых временах $\langle\Delta\beta^2\rangle \simeq \simeq (2^9/9)\sigma_F^2\nu^2t^3$.

Отметим в заключение, что аналогично можно найти эволюцию кинка уравнения sin-Gordon ($F = \Gamma = 0$): $\varphi_0 = 4\mathrm{arctg}\,\times$ $\times\exp\left[\pm(x - vt)/\sqrt{1 - v^2}\right]$. Уравнение для скорости имеет вид /8/

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon\,\frac{(1 - v^2)}{4}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,t)\,\mathrm{sech}\,\theta\,dx,$$

где

$$\theta = \left[x - \int_0^t v(t')dt' - x_0(t)\right]/\sqrt{1 - v^2}\,.$$

Отсюда легко получить, учитывая (2), что (см. также /6/)

$$\langle[v(t) - v(0)]^2\rangle = \varepsilon^2\sigma_F^2 t/8.$$

т.е. одиночный кинк разгоняется по закону, аналогичному закону ускорения солитона КдВ /I/.

Поступила в редакцию
25 февраля I982 г.

## Литература


I. Н. И. Филоненко, ДАН СССР, I89, I208 (I969).
2. Б. И. Меерсон, в сб. "Волны и дифракция", т. 3, I26, изд. ИРЭ АН СССР, М., I98I г.
3. Ф. Х. Абдуллаев, ФТТ, 23, 34I8 (I98I).
4. M. Büttiker, Phys. Lett., 81A, 391 (1981).
5. Ф. Х. Абдуллаев и др., Изв. ВУЗов "Физика", № I2, 2I (I98I).
6. Г. М. Заславский, УФН, III, 395 (I973).
7. В. Е. Захаров и др., Теория солитонов. Метод обратной задачи., "Наука", М., I980 г.
8. Солитоны в действии. сб. статей под ред. К. Лонгвена, Э. Скотта, "Мир", М., I98I г.