Краткие сообщения по физике № 10 1982

МЕТОД ПАДЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ РЕНОРМГРУППЫ В ОБЛАСТИ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ И СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

С. А. Гаджиев [ж)], И. М. Дремин, В. Я. Файнберг

УДК 530.I45

Метод Паде применяется для суммирования ряда теории возмущений для β-функции. Используя асимптотическое поведение β-функции в пределе сильной связи, в КХД при этом можно получить удержание (с учетом трехпетлевого приближения для β) и разумное поведение ренорминвариантного заряда.

Известно, что уравнения ренормгруппы для ренорминвариантного заряда ρ в асимптотической области $(x \gg 1)$ для мультипликативно перенормируемых моделей можно записать либо в дифференциальной форме

$$x d\rho/dx = \beta(\rho), \tag{I}$$

где $\beta(\rho)$ - функция Овсянникова - Каллана - Симанзика /I/, либо в интегральной форме

$$\rho(x, \rho_0) = \rho(x/t, \rho(t, \rho_0)) \tag{2}$$

с граничным условием $\rho(1, \rho_0) = \rho_0$. Здесь (в евклидовой области) $x = p^2/\mu^2$, μ^2 - точка нормировки. Общее решение (I) и (2) имеет вид:

$$\Phi(\rho(x, \rho_0)) - \Phi(\rho_0) = \ln x, \tag{3}$$

где $\Phi(\rho)$ - произвольная функция.

ж) Азербайджанский государственный университет, г. Баку.

Обычно, для того, чтобы выделить класс решений, отвечающих определенной квантово-полевой модели, находят Φ из решения (I), подставляя выражение для $\beta(\rho)$, рассчитанное вплоть до заданного порядка теории возмущений. Очевидно, что такой метод не пригоден в области промежуточной и сильной связи, особенно если учесть асимптотический характер рядов (с факториально растущими коэффициентами) для $\beta(\rho)$. Общее исследование (I) и (2) показывает, что можно различать три типа возможного поведения $\beta(\rho)$ [ж)] /2/.

I) $\beta(\rho)\to 0$, $\rho\to\rho_0$ – это соответствует конечной перенормировке заряда; 2) $|\beta(\rho)| \leqslant C\rho$ – в этом случае перенормировка в теории является бесконечной; 3) $\beta(\rho)\to C\rho^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ – рост в пределе сильной связи превышает линейный, что ведет к внутренним противоречиям в модели: либо в инфракрасной области ($C<0$), либо в ультрафиолетовой области ("заряд нуль" /3/). Первая и вторая возможности являются самосогласованными.

Естественно для нахождения $\beta(\rho)$ в области промежуточной и сильной связи использовать различные приближенные методы суммирования рядов теории возмущений, которые давали бы выражения для ренорминвариантного заряда и функций Грина, не противоречащие общим принципам теории (унитарность, аналитичность и т.п.). В качестве таких методов в квантовой электродинамике (КЭД) и ряде других моделей был использован метод редмондизации /4/, поиск решений уравнений ренормгруппы с неаналитической зависимостью от ρ /5/, дисперсионный метод /6/. В случае КХД был предложен целый ряд аппроксимаций для $\beta(\rho)$, дающих удерживающий линейно-растущий потенциал между тяжелыми кварками /7/. Одним из веских доводов в пользу таких приближений является линейный рост $\beta(\rho)$ в области сильной связи в решеточных моделях /8/. Беспараметрическая интерполяционная формула такого рода предложена одним из нас /9/:

$$-\beta(\rho)/\rho = (a_1\rho + a_2\rho^2)/(1 + a_1\rho + a_2\rho^2), \qquad (4)$$

ж) Случай $\beta(\rho) = 0$ приводит к отсутствию перенормировки заряда в теории.

где $a_1 = \beta_1$, $a_2 = \beta_2 + \beta_1^2$, β_1, β_2 – первые два коэффициента разложения $\beta(\rho)$ в ряд по $\rho = g^2/16\pi^2$.

Все формулы типа (4) – это суммирование ряда для $\beta(\rho)$ методом Паде с определенными граничными условиями. Прямое обобщение (4) на любой порядок теории возмущений выглядит так:

$$-\beta(\rho)/\rho = \left(\sum_1^n a_i \rho^i\right) \Big/ \left(1 + \sum_1^n a_i \rho^i\right), \tag{5}$$

где коэффициенты a_i выражаются через β_i следующим образом:

$$a_i = \beta_i + \sum_{\substack{j,k\geq 1 \\ j+k=i}} \beta_j\beta_k + \sum_{\substack{j,k,l\geq 1 \\ j+k+l=i}} \beta_j\beta_k\beta_l + \ldots \tag{6}$$

$$+ \sum_{\substack{j,k,\ldots,n\geq 1 \\ j+k+\ldots+n=i}} \beta_j\beta_k \ldots \beta_n.$$

Можно показать, что формулы (5) и (6) приводят к ряду необходимых свойств: I) к совпадению с рядом теории возмущений до n-го порядка для $\beta(\rho)$ и, следовательно, для $\rho(x, \rho_0)$; 2) к линейному росту потенциала на больших расстояниях и удержанию кварков; 3) к бесконечной перенормировке заряда; 4) к отсутствию инфранестабильности и нефизических особенностей у $\rho(x, \rho_0)$, если все $a_i \geq 0$, (так как в этом случае $\beta(\rho)$ не имеет особенностей в области физических значений $\rho \geq 0$).

В работе /I0/ были найдены функция $\beta(\rho)$ и аномальные размерности полей в трехпетлевом приближении неабелевой калибровочной теории с фермионами. При этом использовались метод размерной регуляризации и ренормализационная процедура, предложенная Хуфтом /II/, так называемая "минимальная схема вычитанная". Для группы SU(3) коэффициенты β_1, β_2 и β_3 в разложении $\beta(\rho)$ равны:[ж)]

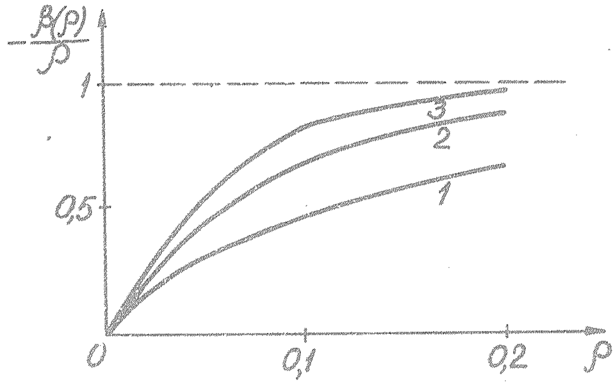
ж) Интересно отметить, что для $f = 6$ β_3 становится отрицательной величиной. Коэффициент a_3 в (5) остается при этом положительным.

$$\beta_1 = (33 - 2f)/3, \quad \beta_2 = (306 - 38f)/3,$$

$$\beta_3 = 2857/2 - (5033/18)f + (325/54)f^2,$$

где f – число флэйворов (ароматов). Из (6) имеем:

$$a_1 = \beta_1, \quad a_2 = \beta_2 + \beta_1^2; \quad a_3 = \beta_3 + 2\beta_2\beta_1 + \beta_1^3.$$



Р и с. I.

Функции $\beta(\rho)$ при $n = 1$, 2 и 3 изображены на рис. I. Из рисунка видно, что с ростом n переход в область сильной связи в районе $\rho = g^2/16\pi^2 \approx 0{,}05$ становится все более резким. Выражение для ренорминвариантного заряда легко получить, интегрируя уравнение (I) при $\beta(\rho)$, заданной формулой (5). Аналитическая зависимость для $n = 2$ приведена в /9/. При $n = 3$ принципиальных отличий от случая $n = 2$ не возникает, но явный вид заряда несколько меняется, так как он зависит от знака выражения $4a_1a_3 - a_2^2$ (оно положительно для $f = 3$ при a_3 из (6) и отрицательно для $n = 2$, когда $a_3 = 0$).

Заметим, что с ростом n вид потенциала тяжелых кварков все сильнее отличается от предложенного при изучении уровней кварконнев /7/ и несколько приближается к даваемому решеточными моделями /8/. Вопрос о том, сколь хорошо Паде-аппроксимации описывают уровни кваркониев, сейчас исследуется.

Перейдем теперь к Паде-приближениям в квантовой электродинамике. К сожалению в КЭД неизвестно поведение $\beta(\alpha)$ в области больших α. Решеточные методы здесь не могут помочь, поскольку речь идет о взаимодействии на малых расстояниях. Поэтому у нас отсутствует важный критерий - поведение при $\alpha \to \infty$ - для однозначного суммирования ряда по α для $\beta(\alpha)$ методом Паде. Но, несмотря на это, можно утверждать, что существует широкий спектр приближенных формул для $\beta(\alpha)$, которые при разложении в ряд по α дают правильные коэффициенты β_i вплоть до определенного порядка, имеют заданное асимптотическое поведение при $\alpha \to \infty$ в пределах указанных выше первых двух возможностей, т.е. не обладают трудностью "нуль заряда". В частности, если потребовать, чтобы $\beta(\alpha)/\alpha \to C$ $(C > 0)$ при $\alpha \to \infty$, то Паде-суммирование с точностью до членов α^n дает

$$- \beta(\alpha)/\alpha = C\left(\sum_1^n \tilde{a}_i \alpha^i\right)\Big/\left(1 + \sum_1^n \tilde{a}_i \alpha^i\right), \qquad (7)$$

где $\tilde{a}_i$ выражаются через β_i по формулам:

$$\tilde{a}_i = C^{-1}\beta_i + C^{-2} \sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=n}} \beta_j \beta_k + \ldots + C^{-n} \sum_{\substack{j,k,\ldots m \geq 1 \\ j+k+\ldots+m=n}} \beta_j, \beta_k, \ldots \beta_m.$$

Вплоть до 3-го порядка [ж)] /I/ $\tilde{a}_i$ являются положительными числами и поэтому не приводят к появлению нефизических особенностей в ренорминвариантном заряде, а следовательно, и в функции распространения фотона. При этом можно показать, что свойство положительности функции Гелл-Манна - Лоу /I2/ $\psi(\alpha)$ не будет нарушаться.

Формула (7) ведет к степенному росту с импульсом ренорминвариантного заряда $\rho(x)$ и, следовательно, фотонной функции

ж) Мы здесь отвлекаемся от различных способов перенормировки и определение ренорминвариантного заряда, которые, вообще говоря, приводят к разным коэффициентам β_i, начиная с $i \geq 3$ /13/.

$\phi(x,\alpha)\sim x^{c}$ и к линейному увеличению сингулярности потенциала на малых расстояниях. При $c\geq 1$ потенциал между заряженными частицами будет обладать сингулярностью выше r^{-2} что приведет к неустойчивости системы. Что касается возможности нарушения микропричинности при таком способе суммирования, то этот вопрос требует дополнительного исследования. Во всяком случае, в настоящее время не ясно, какому способу суммирования диаграмм или решению каких приближенных уравнений для функций Грина соответствует Паде-приближение для β-функции.

Поступила в редакцию
4 мая 1982 г.

Литература

1. Л. В. Овсянников, ДАН СССР, 109, 1112 (1956); K. Symanzik, Commun. Math. Phys., 18, 227 (1970); C. Callan, Phys. Rev., D2, 1542 (1970).
2. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, "Наука", М., 1976 г., гл. IX.
3. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ, 29, 258 (1955); Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР, 102, 489 (1955).
4. P. Redmond, Phys. Rev., 112, 1404 (1958).
5. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, Д. В. Ширков, ЖЭТФ, 37, 805 (1959); Д. А. Киржниц, В. Я. Файнберг, Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ, 38, 1863 (1960).
6. В. Я. Файнберг, ЖЭТФ, 37, 1361 (1959); С. А. Гаджиев, Ю. А. Тарасов, В. Я. Файнберг, Краткие сообщения по физике ФИАН № 5, 30 (1975).
7. W. Celmaster, F. S. Henyey, Phys. Rev., D18, 1688 (1978); W. Buchmüller, G. Grunberg, S.-H.H. Tye, Phys. Rev. Lett., 45, 103 (1980).
8. J. B. Kogut, R. B. Pearson, J. Shigemitsu, Phys. Rev. Lett., 43, 484 (1979).
9. И. М. Дремин, Краткие сообщения по физике ФИАН №1, 45 (1982); И. М. Дремин, А. В. Леонидов, ТМФ, № 5, (1982).
10. O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov, Препринт ОИЯИ, Е2-80-483, Дубна, 1980 г.

11. G. 't Hooft, Nucl. Phys., B61, 455 (1973); J. C. Collins, A. J. Macfarline, Phys. Rev., D10, 1201 (1974).
12. M. Gell-Mann, F. E. Low, Phys. Rev., 95, 1300 (1954).
13. V. I. Ritus, Preprint N 93, P. N. Lebedev Physical Institute, Moscow, 1976.