Краткие сообщения по физике № 12 1982

ОБ ОКОНЧАНИИ СПЕКТРА ЭЛЕКТРОННЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ II.

В. П. Силин, В. Н. Урсов

УДК 533.951.2

Показано, что продольные волны с досветовыми фазовыми скоростями определяют эволюцию начальных возмущений ультрарелятивистской больцмановской плазмы в области небольших волновых векторов. Именно, волновые вектора продольных волн могут превышать значение $k_1 = d^{-1} \times \times (\ln(2\varkappa T/mc^2) + 1/2 - C)$ лишь на величину, малую по сравнению с обратным дебаевским радиусом d^{-1}.

Проблемы плазменной астрофизики стимулируют интерес к продольным волнам с досветовыми фазовыми скоростями в ультрарелятивистской плазме /1/. Сосредоточим внимание на окончании спектра этих волн, которое, в отличие от нерелятивистской плазмы, не может быть связано с сильным затуханием колебаний, поскольку декремент затухания всегда мал /2,3/. Напомним, что диэлектрическая проницаемость релятивистской плазмы $\varepsilon(\omega,k)$ имеет точки ветвления $\omega = \pm kc$ /4/, наличие которых приводит к неволновой зависимости от времени продольного поля, вызванного начальным возмущением. В то же время из численных расчетов, посвященных изучению эволюции начальных возмущений в релятивистской плазме /5,6/, видно, что в области коротких длин волн неволновая часть поля может оказаться основной. Следует считать, что именно такая область волновых векторов может быть отождествлена с областью окончания спектра продольных волн.

Для определения и изучения области окончания спектра продольных волн в ультрарелятивистской больцмановской плазме ($\alpha = mc^2/\varkappa T \ll 1$) необходимо сравнить волновую и неволновую части продольного поля в плазме. Для этого, рассматривая начальную задачу, изучим интеграл в преобразовании Фурье – Лапласа, определяющий изменение во времени потенциала продольного поля, вызванного начальным возмущением $\sim \exp(i\vec{k}\vec{r})$ (ср. /7/):

$$\varphi(t,k) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega \exp(-i\omega t)\Phi(\omega,k)\left[\varepsilon_1(\omega,k)\right]^{-1}, \qquad (I)$$

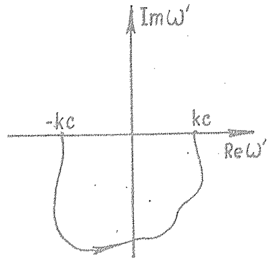
где $\sigma > 0$, $\Phi(\omega,k)$ связана с начальным возмущением. Диэлектрическая проницаемость больцмановской плазмы /4/

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 + \left[d^2k^2\alpha^2K_2(\alpha)\right]^{-1}(kc/\omega) \int_{-1}^{1} dy y^2[y - (\omega/kc)]^{-1} \times$$
$$\times \exp\left[-\alpha(1-y^2)^{-1/2}\right]\left[1 + \alpha(1-y^2)^{-1/2} + (\alpha^2/2)(1-y^2)^{-1}\right] \qquad (2)$$

($d = (\varkappa T/4\pi e^2 N)^{1/2}$ -дебаевский радиус, $K_2(\alpha)$ - функция Макдональда), определенная в комплексной плоскости ω с разрезом по действительной оси между точками $\pm$ kc, не описывает каких либо затухающих плазменных колебаний /3/. Поэтому в формуле (I) для описания затухающих колебаний необходимо использовать не функцию (2), а ее аналитическое продолжение $\varepsilon_1(\omega,k)$ в нижнюю полуплоскость комплексного переменного ω (ср. /7/), которое можно получить деформацией контура интегрирования в формуле (2) (см. рис. I, на котором изображен соответствующий контур C_I /3/). Можно утверждать, что

$$\Delta\varepsilon(\omega,k) \equiv \varepsilon_1(\omega,k) - \varepsilon(\omega,k) = i2\pi\left[d^2k^2\alpha^2K_2(\alpha)\right]^{-1}(\omega/kc) \times$$
$$\times \exp\left[-\alpha(1-(\omega/kc)^2)^{-1/2}\right]\left[1+\alpha(1-(\omega/kc)^2)^{-1/2} + (\alpha^2/2) \times\right.$$
$$\left.\times (1-(\omega/kc)^2)^{-1}\right]$$

отлично от нуля только в области плоскости ω, ограниченной контуром C_I и отрезком оси $-kc \leqslant \omega \leqslant kc$.



Р и с. I. Контур C_I в комплексной плоскости $\omega' = ykc$

Определив входящие в формулу (I) величины, перейдем к ее исследованию. Для этого, опуская контур интегрирования в плоскости ω бесконечно вниз, сводим контур к обходам особенностей подинтегрального выражения. Если не интересоваться особенностями, обусловленными начальным возмущением, то потенциал продольного поля можно разделить на две части: волновую

$$\varphi_w(t,k) = -i\exp(-i\mathrm{Re}\,\omega_0 t + \mathrm{Im}\,\omega_0 t)\Phi(\omega_0,k)\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_1(\omega,k)\right]^{-1}_{\omega=\omega_0}, \quad (3)$$

где ω_0 определяется из дисперсионного уравнения $\varepsilon_1(\omega_0,k) = 0$, и неволновую часть, связанную с интегрированием по берегам разреза

$$\varphi_n(t,k) = -(2\pi)^{-1}\int_{C_1} d\omega\exp(-i\omega t)\,\frac{\Phi(\omega,k)\Delta\varepsilon(\omega,k)}{\varepsilon(\omega,k)[\varepsilon(\omega,k)+\Delta\varepsilon(\omega,k)]}. \quad (4)$$

При временах $\alpha^2 kct \gg 1$ зависимость неволновой части от времени с точностью до несущественных множителей определяется формулой (ср. /6/)

$$|\varphi_n(t,k)| \sim \exp\left[-3^{3/2}(\alpha^2 kct)^{1/3}/4\right]. \quad (5)$$

Переходя к изучению волновой части поля, обсудим решения дисперсионного уравнения $\varepsilon_1(\omega,k) = 0$. Известно, что решения, отвечающие досветовым фазовым скоростям волн, существуют при $k^2 > k_1^2 = d^{-2}[\ln(2/\alpha) + 1/2 - C]$ (C – постоянная Эйлера) /8/ и только для $z = \alpha(1 - (\omega/kc)^2)^{-1/2} \geq 1$ /3/. В случае $|z| \gg 1$ спектр продольных волн с $|\mathrm{Im}\,\omega_0| \ll \alpha^2 kc$ существует только при $k^2 - k_1^2 \ll d^{-2}$ /8/ [ж)]. Для определения области окончания спектра необходимо рассмотреть до сих пор неизученную область $|z| \sim 1$. Для этого в интересующей нас области переменной ω получим асимптотическое выражение диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской больцмановской плазмы. Преобразовывая выражение (2) к виду

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 + 2\left[d^2k^2\alpha^2K_2(\alpha)\right]^{-1}\left\{1 + (\omega/2kc)\ln\frac{\omega - kc}{\omega + kc} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left((\omega/kc)^2 - 1\right)^{-1}\left(2 - \alpha^2K_2(\alpha)\right) + \frac{1}{2}(\omega/kc)^2\times$$

$$\times\left(1 - (\omega/kc)^2\right)^{-1}\int_0^1 dx x^2\int_1^\infty d\tau\tau(\tau^2 - 1)^{-1/2}\times$$

$$\left.\times\left[\left((\omega/kc)^2 - 1\right)\tau^2 + 1\right]^{-1}\exp(-x\tau)\right\}$$

и раскладывая $\tau(\tau^2 - 1)^{-1/2}$ по степеням τ^{-2} при условии $\alpha^3 \ll |1 - (\omega/kc)^2| \ll 1$ получаем

ж) В работе /8/ (стр. 140) утверждается, что простое выражение для частоты продольных волн ультрарелятивистской плазмы $\omega = c(k - (k - k_1)\alpha^2\ln(1/\alpha)/6)$ ((3.24) /8/) справедливо вплоть до волновых векторов, удовлетворяющих условию $|k - k_1| \ll k_1$. Однако легко убедиться в том, что для применимости указанной формулы для частоты требуется более жесткое ограничение $|k - k_1| \ll k_1/\ln(1/\alpha)$ или $|k^2 - k_1^2| \ll d^{-2}$. Это условие вытекает из ограничения $|1 - \omega/kc| \ll \alpha^2$ ((3.5) в /8/), которое было использовано при выводе формулы (3.24) /8/.

$$\varepsilon(\omega,k) = 1 - k_1^2/k^2 + (kd)^{-2}\Big[3/2 + e^zE_1(z)(z^2 - 2z + 2)/4 + e^{-z}E_1(-z)(z^2 + 2z + 2)/4\Big], \tag{6}$$

$$\Delta\varepsilon(\omega,k) = i\pi(kd)^{-2}e^{-z}(z^2 + 2z + 2)/2,$$

где $E_1(z)$ – интегральная показательная функция /9/. Теперь с помощью формул (6) заключаем, что решения дисперсионного уравнения с $|z|\sim 1$ могут существовать при волновых векторах удовлетворяющих условию

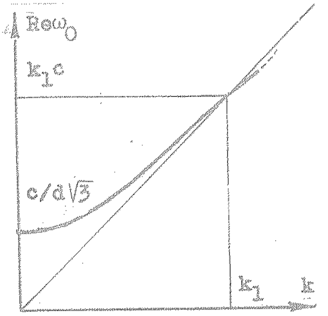
$$k^2 - k_1^2 \sim d^{-2}. \tag{7}$$

При этом в силу условий (7) и $|z|\sim 1$ согласно формулам (6) получаем оценку $|\mathrm{Im}\,\omega_0| \sim \alpha^2|\mathrm{Re}\,\omega_0| \approx \alpha^2 kc$ (ср. /2,3/).

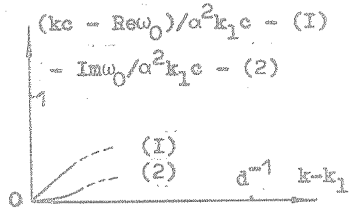
Для определения области окончания спектра сравним волновую и неволновую части продольного поля. С помощью формул (3), (5) заключаем, что при $k^2 - k_1^2 \ll d^{-2}$, когда $|\mathrm{Im}\,\omega_0| \ll \alpha^2 kc$ и при временах удовлетворяющих неравенствам $1 \ll \alpha^2 kct \ll$ $\ll |\alpha^2 kc/\mathrm{Im}\,\omega_0|^{3/2}$ волновая часть поля значительно превышает неволновую. В случае $k^2 - k_1^2 \sim d^{-2}$, когда $|\mathrm{Im}\,\omega_0| \sim \alpha^2 kc$, формулы (3), (5) показывают, что при временах $\alpha^2 kct \gg 1$ волновая часть поля много меньше его неволновой части. При меньших временах $\alpha^2 kct \lesssim 1$ оценка показывает, что волновая часть по порядку величины не превышает неволновую часть. Действительно, с помощью формул (6) при $k^2 - k_1^2 \sim d^{-2}$ убеждаемся в том, что область $|1 - (\omega/kc)^2| \sim \alpha^2$ дает в интеграл (4), определяющий неволновую часть поля, вклад порядка

$$\alpha^2 kc\Phi(\omega \approx kc,\ k)(kd)^2.$$

Такую же величину дает оценка волновой части поля (3) при временах $\alpha^2 kct \lesssim 1$ и для волновых векторов $k^2 - k_1^2 \sim d^{-2}$, когда $|\mathrm{Im}\,\omega_0| \sim \alpha^2 kc$.



Р и с. 2. Спектр электронных ленгмюровских волн ультрарелятивистской больцмановской плазмы. Пунктирная линия соответствует области окончания спектра



Р и с. 3. Схематический вид спектра затухающих электронных ленгмюровских волн. Пунктирная линия соответствует области окончания спектра $k - k_1 \sim d^{-1}(\ln(1/\alpha))^{-1/2}$

Таким образом показано, что досветовые продольные волны ($k > k_1$) определяют эволюцию начальных возмущений только в области волновых векторов, превышающих граничное значение k_1 на величину малую по сравнению с обратным дебаевским радиусом, что и соответствует области окончания спектра (см. рис. 2,3, а также /5/).

Поступила в редакцию
20 июля 1982 г.

Л и т е р а т у р а

I. Д. Г. Ломинадзе, А. Б. Михайловский, ЖЭТФ, 76, 959 (1979).

2. В. П. Силин, ЖЭТФ, 38, 1577 (1960).

3. В. П. Силин, В. Н. Урсов, Краткие сообщения по физике ФИАН № I, 34 (1982).

4. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961 г.

5. B. B. Godfrey, B. S. Newberger, K. A. Taggart, IEEE Trans. Plasma Sci., PS-3, 68 (1975).

6. B. B. Godfrey, B. S. Newberger, K. A. Taggart, IEEE Trans. Plasma Sci., PS-3, 185 (1975).

7. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).

8. A. B. Mikhailovskii, Plasma Physics, 22, 133 (1980).

9. Справочник по специальным функциям под ред. М. А. Абрамовица и И. Стиган, "Наука", М., 1979 г.