Краткие сообщения по физике № 1 1981

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ

С. В. Буланов

УДК 533.9.01.95

Рассмотрены автомодельные решения, описывающие нестационарные движения плазмы в неоднородном магнитном поле в трехмерном случае. За конечный промежуток времени напряженность магнитного поля, скорость и плотность плазмы обращаются в бесконечность.

В работах /I-3/ В. С. Имшенником и С. И. Сыроватским в связи с проблемой перезамыкания магнитных силовых линий в плазме исследовались двумерные течения в окрестности нулевой линии магнитного поля. Для сжимаемой жидкости были получены точные частные решения, в которых компоненты скорости и магнитного поля зависят от пространственных координат линейным образом. Плотность плазмы зависит только от времени. Было показано, что за конечный промежуток времени одна из компонент скорости, магнитного поля и плотность обращаются в бесконечность, то есть происходит кумуляция вещества и магнитной энергии вблизи нулевой линии. В данной работе показывается, что кумуляция магнитной энергии возможна в более общих предположениях в случае пространственных течений плазмы в неоднородных магнитных полях.

А. Г. Куликовским /4/ (см. также /3/) в общем виде было указано, что уравнения магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{[\mathrm{rot}\vec{B},\vec{B}]}{4\pi\rho} + \nu\Delta\vec{v} + (\mu + \nu/3)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}; \quad (I)$$

$$p = p(\rho);$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\vec{v},\vec{B}] + \nu_m\Delta\vec{B}; \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \tag{3}$$

обладают частными решениями вида

$$\rho = \rho(t), \; v_i(\vec{x},t) = u_i(t) + w_{ij}(t)x_j, \; B_i(\vec{x},t) = b_i(t) + a_{ij}(t)x_j. \tag{4}$$

Векторы $u_i(t)$ и $b_i(t)$ и матрицы $w_{ij}(t)$ и $a_{ij}(t)$ зависят только от времени.

Подстановка выражений (4) в уравнения (I) – (3) приводит к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathring{u}_i + w_{ik}u_k = (a_{ik} - a_{ki})b_k/(4\pi\rho), \tag{5}$$

$$\mathring{b}_i + w_{kk}b_i - w_{ik}b_k + a_{ik}u_k = 0, \tag{6}$$

$$\mathring{\rho} + w_{kk}\rho = 0, \tag{7}$$

$$\mathring{a}_{ij} + w_{kk}a_{ij} - w_{kj}a_{ik} + w_{ik}a_{kj} = 0, \; a_{kk} = 0, \tag{8}$$

$$\mathring{w}_{ij} + w_{ik}w_{kj} = (a_{ik} - a_{ki})a_{kj}/(4\pi\rho). \tag{9}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Уравнения (7) – (9) независимы от уравнений (5), (6). Это означает, что решения системы (7) – (9) для плотности $\rho(t)$ и матриц $a_{ij}(t)$ и $w_{ij}(t)$ определяют эволюцию векторов $u_i(t)$ и $b_i(t)$ при заданных начальных значениях $u_i(0)$ и $b_i(0)$. Если $u_i(0) = 0$ и $b_i(0) = 0$, то $u_i(t) = b_i(t) = 0$. При этом выражения (4) описывают течение плазмы в окрестности нулевой точки. Этот случай является типичным в классе решений типа (4), так как уравнения (7) – (9) не зависят от вида функций $u_i(t)$ и $b_i(t)$

Рассмотрим решения системы (7) – (9), обладающие особенностью. Пусть матрицы $a_{ij}(t)$ и $w_{ij}(t)$ имеют вид

$$a_{ij}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & 0 & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{Vmatrix}, \quad w_{ij}(t) = \begin{Vmatrix} w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 \\ 0 & 0 & w_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (10)$$

Аналогично /1-3/ произведем подстановку

$$w_{11} = \mathring{\xi}/\xi, \quad w_{22} = \mathring{\eta}/\eta, \quad w_{33} = \mathring{\zeta}/\zeta, \qquad (11)$$

тогда систему (7) – (9) можно привести к виду

$$4\pi\rho_0 \ddot{\xi} = \frac{\eta}{\xi} a^0_{21} \left(\frac{a^0_{12}}{\eta^2} - \frac{a^0_{21}}{\xi^2} \right) + \frac{\zeta}{\eta} a^0_{31} \left(\frac{a^0_{13}}{\zeta^2} - \frac{a^0_{31}}{\xi^2} \right), \qquad (12)$$

$$4\pi\rho_0 \ddot{\eta} = \frac{\xi}{\xi} a^0_{12} \left(\frac{a^0_{21}}{\xi^2} - \frac{a^0_{12}}{\eta^2} \right) + \frac{\zeta}{\xi} a^0_{32} \left(\frac{a^0_{23}}{\zeta^2} - \frac{a^0_{32}}{\eta^2} \right), \qquad (13)$$

$$4\pi\rho_0 \ddot{\zeta} = \frac{\xi}{\eta} a^0_{13} \left(\frac{a^0_{31}}{\xi^2} - \frac{a^0_{13}}{\zeta^2} \right) + \frac{\eta}{\xi} a^0_{23} \left(\frac{a^0_{32}}{\eta^2} - \frac{a^0_{23}}{\zeta^2} \right). \qquad (14)$$

Здесь ρ_0 и a^0_{ij} значения плотности и компонент матрицы a_{ij} в момент $t = 0$. Начальные значения $\xi(0) = \eta(0) = \zeta(0) = 1$ и $\mathring{\xi}(0) = \mathring{\xi}_0$, $\mathring{\eta}(0) = \mathring{\eta}_0$, $\mathring{\zeta}(0) = \mathring{\zeta}_0$.

В момент возникновения особенности $t = t_0$ в общем случае одна из функций ξ, η или ζ обращается в ноль, остальные две остаются конечными. Значение момента времени t_0 зависит от всех начальных данных и может быть найдено из решения полной системы уравнений. Если в ноль, например, обращается функция

$\zeta(t)$, а ξ и η остаются конечными, то вблизи особенности уравнения (I2) – (I4) имеют вид

$$\ddot{\xi} \cong \frac{1}{4\pi\rho_0\eta\zeta}\left(a^0_{12}a^0_{21} + a^0_{13}a^0_{31} - \left(a^0_{21}\frac{\eta}{\xi}\right)^2\right), \qquad (I5)$$

$$\ddot{\eta} \cong \frac{1}{4\pi\rho_0\eta\zeta}\left(a^0_{12}a^0_{21} + a^0_{32}a^0_{23} - \left(a^0_{12}\frac{\xi}{\eta}\right)^2\right), \qquad (I6)$$

$$\ddot{\zeta} \cong -\frac{(\xi a^0_{13})^2 + (\eta a^0_{23})^2}{4\pi\rho_0\xi\eta\zeta^2}. \qquad (I7)$$

Решение этих уравнений при $t \to t_0$ таково:

$$\xi = \xi_c + \ldots, \quad \eta = \eta_c + \ldots,$$

$$\zeta = \left[\frac{9}{8\pi\rho_0}\,\frac{(a^0_{13}\xi_c)^2 + (a^0_{23}\eta_c)^2}{\xi_c\eta_c}\right]^{1/3}(t_0 - t)^{2/3} + \ldots \qquad (I8)$$

Отсюда находим асимптотическое поведение искомых функций вблизи особенности:

$$w_{11} \to \mathrm{const}; \; w_{22} \to \mathrm{const}; \; w_{33} \backsim -\frac{1}{t_0 - t}. \qquad (I9)$$

Плотность плазмы обращается в бесконечность

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\xi\eta\zeta} \backsim \frac{1}{(t_0 - t)^{2/3}}. \qquad (20)$$

Не выписывая зависимостей от времени всех компонент матрицы a_{ij}, отметим, что наиболее быстро обращаются в бесконечность при $t \to t_0$ компоненты

$$a_{13} = \frac{a_{13}^{0}}{\eta\xi^2} \backsim \frac{1}{(t_0 - t)^{4/3}}, \tag{21}$$

$$a_{23} = \frac{a_{23}^{0}}{\varepsilon\xi^2} \backsim \frac{1}{(t_0 - t)^{4/3}}. \tag{22}$$

Если в момент $\hat{t} = 0$ лагранжева поверхность, движущаяся при $t > 0$ вместе с частицами плазмы, представляет собой сферу, то со временем в силу выражений (I9) она превращается в трехосный эллипсоид. Этот эллипсоид сжимается вдоль одной оси так, что в момент $t = t_0$ его объем обращается в ноль, т.е. плотность плазмы обращается в бесконечность.

Из выражений (4), (I0) и (2I), (22) следует, что плотность тока $j_i = (c/4\pi)[\mathrm{rot}\vec{B}]_i = (c/4\pi)\varepsilon_{ijk}a_{jk}(t) \backsim (t_0 - t)^{-4/3}$ также обращается в бесконечность при $t \to t_0$.

Уравнения (I2) – (I4) и их решения (I8) – (22) переходят в выражения полученные В. С. Имшенником и С. И. Сыроватским /I/, если $\mathring{\varepsilon}_0 = 0$, $a_{32} = a_{23} = a$ и $a_{31} = a_{13} = a_{21} = a_{12} = 0$.

Очевидно, что обращение в бесконечность физических величин (плотности, напряженности магнитного поля и т.д.) в действительности невозможно. Непосредственно, вблизи особенности становится существенным отличие реальных граничных и начальных условий от требуемых в задаче.

Полученные решения можно рассматривать как локальную аппроксимацию общего решения, описывающего течение плазмы в неоднородном магнитном поле на конечном промежутке времени. Из приведенного выше анализа следует, что асимптотическое поведение решения для величин $\rho(t)$, $a_{ij}(t)$, $w_{ij}(t)$ вблизи особенности не зависит от локальных значений скорости плазмы $u_i(t)$ и магнитного поля $b_i(t)$. Это означает, что в классе решений (4) конфигурация, соответствующая нулевой точке, является типичной.

Поступила в редакцию
2I октября I980 г.

Литература

1. В. С. Имшенник, С. И. Сыроватский, ЖЭТФ, 52, 990 (1967).
2. С. И. Сыроватский, ЖЭТФ, 54, 1422 (1968).
3. В. С. Имшенник, ПМТФ № 2, 2 (1972).
4. А. Г. Куликовский, Докл. АН СССР, 120, 984 (1958).