Краткие сообщения по физике № 3 1981

О ФУНКЦИИ ГРИНА В ПОЛЕ ИНСТАНТОНА В ТЕОРИИ $g\varphi^4$

А. Ф. Курчанов [ж)], В. Я. Файнберг

УДК 530.145

Найдена функция Грина в поле инстантона без учета вклада нулевых мод. Показано, что сингулярное поведение этой функции на больших расстояниях приводит к инфракрасным расходимостям, возникающим в результате усреднения по параметрам (a) классического решения.

Для расчета высших порядков теории возмущений вблизи инстантонного решения, а также при исследовании вопросов инфрарасходимости и перенормируемости возникает необходимость знать свойства функции Грина в поле инстантона. В этой заметке находится такая функция Грина для теории $g\varphi^4$ /I/.

Функции Грина можно получить из производящего континуального интеграла

$$e^{-W(J)} = \left(\int D\varphi e^{-S+\langle J|\varphi\rangle}\right)\Big/\left(\int D\varphi e^{-S}\right). \qquad (I)$$

Рассматривается евклидова теория поля с действием:

$$S = \frac{1}{2}\langle\varphi|\Box\varphi\rangle - g\langle\varphi^4|1\rangle,$$

где $g>0$, J – внешний ток, $\langle a|b\rangle = \int ab\,d^4x$. Для нас здесь несущественно, что интегралы в (I) не определены: важна схема возникновения функции Грина в поле инстантона и ее свойства. Кроме того мы опускаем перенормировочные контрчлены.

ж) Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова.

Уравнение для экстремалей $-\Box\varphi + 4g\varphi^3 = 0$ имеет инстантонное решение /2/

$$\varphi_{\rho a}(x) = \sqrt{2/g}\,\frac{\rho}{\rho^2 + (x-a)^2}$$

с конечным действием $S_0 = 2\pi^2/3g$. Заменой переменных

$$\omega = \varphi - \varphi_{\rho a} \tag{2}$$

можно переписать выражение для действия в виде:

$$S = S_0 + \frac{1}{2}\langle\omega| -\nabla^2 - \frac{24\rho^2}{(\rho^2+(x-a)^2)^2}|\omega\rangle - 4g\langle\varphi_{\rho a}|\omega^3\rangle - g\langle\omega^4|1\rangle.$$

Полезно сделать переход от пространства R_4 к пятимерной сфере S_5. Это преобразование широко используется в различных работах (см., напр. /2,3/)

$$z_\mu = \frac{2x_\mu}{1+x^2},\ z_5 = \frac{1-x^2}{1+x^2},\ z_\mu z_\mu + z_5 z_5 = 1,\ dS_5 = \frac{16d^4x}{(1+x^2)^4}.$$

Тогда имеет место соответствие:

$$\frac{1}{2}\langle\omega(x)|\nabla^2 + \frac{24}{(1+x^2)^2}|\omega(x)\rangle_{R_4} = \frac{1}{2}\langle Y(z)|\nabla_\tau^2 + 4|Y(z)\rangle_{S_5},$$

где

$$\omega(x) = \frac{2}{1+x^2}Y(z),\ \nabla_5^2 = \frac{1}{z^4}\frac{\partial}{\partial z}z^4\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{z^2}\nabla_\tau^2.$$

Оператор $-\nabla_\tau^2$ является оператором квадрата момента на сфере S_5 и имеет дискретный спектр:

$$\lambda = m(m+3),\ m = 0,1,2,3,\ldots,$$

с собственными функциями $Y_{\mu_1,\ldots\mu_m}$, которые являются симметризованными и ортонормированными полиномами по z. Имеется вырождение в $N_m = (1/6)(m+1)(2m+3)(m+2)$ раз. Оператор $\nabla^2 + 24(1+x^2)^{-2}$ имеет 5 "нулевых мод" ($m = 1$, $N_m = 5$):

$$2N_0\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad 2N_0\frac{2x_\mu}{(1+x^2)^2}.$$

Их можно записать в пятимерном виде: $N_0 z_5$, $N_0 z_\mu$, $N_0 = \pi^{-1}\sqrt{15/8}$. Нулевые моды связаны с инвариантностью действия относительно вращений пятимерной сферы, или в четырехмерном виде с инвариантностью относительно трансляций и масштабных преобразований, описываемых параметрами a и ρ.

В континуальном интеграле (I) после подстановки (2) возникают два параметра разложения /4/: g и $\varepsilon = \exp(-2\pi^2/3g)$. При разложении по g появляются диаграммы с функцией распространения

$$G(z,z') = \sum_{\lambda_m \neq 4} \frac{Y_m(z)Y_m(z')}{\lambda_m - 4}.$$

После "исключения" нулевых мод функция Грина $G(z,z')$ удовлетворяет уравнению:

$$-\left[\nabla_\tau^2 + 4\right]_z G(z,z') = \delta_{S_5}(z,z') - N_0^2(z_\mu z'_\mu + z_5 z'_5),$$

для решения которого мы воспользуемся инвариантностью относительно вращений пятимерной сферы S_5.

Инвариантом на ней будет: $z_\mu z'_\mu + z_5 z'_5$, который при $z'_\mu = 0$ равен z_5. Следовательно, можно решить уравнение

$$-\left[\nabla_\tau^2 + 4\right] G(z) = \delta_{S_5}(z,0) - N_0^2 z_5, \qquad (3)$$

а затем сделать замену $z_5 \to z_5 z'_5 + z_\mu z'_\mu$ или $x^2 \to t = (x-y)^2/\left[1 + 2(xy) + x^2y^2\right]$.

Введем переменную $z_5 \equiv \eta$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$, тогда симметричная часть уравнения (3) запишется в виде

$$\left[\frac{1}{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)^2\frac{\partial}{\partial\eta} + 4\right] G(\eta) = N_0^2\eta - \delta_{S_5}(\eta,0). \qquad (4)$$

Замена $G(\eta) = \eta f(\eta)$ позволяет свести (4) к уравнению первого порядка, которое можно проинтегрировать:

$$G(\eta) = N_0^2\eta\left[\frac{1}{15(1-\eta^2)} - \frac{1}{10}\ln(1-\eta^2)\right] + \alpha\eta\left[\beta - \frac{8}{\eta} + 6\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\eta}{1-\eta^2}\right] = \frac{1-t}{1+t}\left[\frac{N_0^2(1+t)^2}{60t} - \frac{N_0^2}{10}\ln\frac{4t}{(1+t)^2} + \alpha\left(\beta - 8\frac{1+t}{1-t} + 6\ln t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{t^2-1}{t}\right)\right].$$

Мы видим, что при $\eta = 1$ имеется сингулярность, которая при дифференцировании создает $\delta_{S_5}(\eta,0)$ в правой части (4). Выбирая α так, чтобы коэффициент при $\delta_{S_5}(\eta,0)$ равнялся единице, имеем:

$$G(\eta) = \frac{1-t}{16\pi^2(1+t)}\left[\beta + \frac{(1+t)^2}{2t} + \frac{1-t^2}{2t} - 6\ln t + 3\ln\frac{1+t}{2t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+t}{2(1-t)}\right].$$

Член, пропорциональный β, есть решение соответствующего однородного уравнения.

Функция Грина в R_4 имеет вид:

$$G(x,y) = \frac{2}{1+x^2}\, g(x,y)\, \frac{2}{1+y^2} = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1-t}{1+t}\left[\beta + \frac{(1+t)^2}{2t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-t^2}{2t} + 6\ln\frac{1+t}{2t} + \frac{1+t}{2(1-t)}\right],$$

где $t = (x-y)^2/\left[1 + 2(xy) + x^2y^2\right]$. В случае произвольных параметров a, ρ получаем

$$G_{a\rho}(x,y) = \rho^{-2}G\left(\frac{x-a}{\rho}, \frac{y-a}{\rho}\right).$$

В результате устранения нулевых мод из континуального интеграла, появляется интегрирование по параметрам a и ρ. Сходимость интегралов по ρ после перенормировки исследовалась в /4/. Ультрафиолетовые расходимости остаются прежними. Главное внимание мы хотим обратить на инфрарасходимости, возникающие при интегрировании по а. Так, если нас интересует поправка к одночастичной функции Грина $\sim \varepsilon = \exp(-2\pi^2/3g)$, то она оказывается пропорциональной /4/

$$\int d^4a \left[G\left(\frac{x-a}{\rho}, \frac{y-a}{\rho}\right) - G_0\left(\frac{x-a}{\rho}, \frac{y-a}{\rho}\right)\right],$$

где $G_0(x,y) = \left[4\pi^2(x-y)^2\right]^{-1}$ – функция Грина свободной безмассовой частицы. В этом интеграле члены в G, не зависящие от a, уничтожаются вкладом от G_0. Но в G остаются члены $\sim a^{-4}$ и $a^{-4}\ln a^4$, дающие расходимости $\sim \ln V$ и $\ln^2 V$, где V – четырехмерный объем системы.

Отметим, что расходимости $\sim \ln V$ возникают уже в главном квазиклассическом приближении к одночастичной функции Грина за счет инстантонного вклада. В этом приближении добавка ΔG пропорциональна

$$\int d^4a\left[1 + (x-a)^2\right]^{-1}\left[1 + (y-a)^2\right]^{-1}.$$

Фурье-образ этой добавки пропорционален

$$\delta^4(q - q')\left(\int \frac{\exp(iqx)d^4x}{1 + x^2}\right)^2$$

и ведет себя при $q \to 0$ как $q^{-4}\delta^4(q - q')$. Такое поведение в R_4 является недопустимым с точки зрения обобщенных функций и нуждается в доопределении. Похожая ситуация возникает в любой безмассовой теории в R_4 при наличии инстантонов. (В частности в неабелевых калибровочных теориях). Возможно, что это является указанием на непригодность квазиклассического подхода при вычислении поправок вблизи инстантонных решений.

Отметим, что следует различать функцию Грина $\tilde{G}(x,y)$, которая появляется в диаграммах теории возмущений вблизи инстантонного решения, от функции Грина, $G(x,y)$ возникающей после усреднения по параметрам классического решения. Последняя является трансляционно инвариантной (в отличие от первой) и обладает более сингулярным поведением по относительному импульсу.

Поступила в редакцию
21 октября 1980 г.

Литература

1. А. Ф. Курчанов, Дипломная работа, Физфак, МГУ, 1980 г.
2. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ, 72, 411 (1977).
3. S. Adler, Phys. Rev., D6, 3445 (1972); S. Fubini, preprint CERN TH 2129 (1976).
4. V. Ya. Fainberg, M. Z. Iofa, Nucl. Phys., B168, 495 (1980).