*Краткие сообщения по физике № 4 1981*

# О МЕТОДЕ ТАММА – ДАНКОВА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, Н. С. Новожилова,
В. П. Силин

УДК 532.59

Показано, что метод Тамма – Данкова позволяет исследовать самолокализованные в пространстве и периодические во времени состояния нелинейных полей и открывает возможности для построения новых типов интегрируемых полей.

Одной из основных задач современной физики нелинейных волн является задача о самолокализованных состояниях нелинейных полей. В настоящее время для анализа этой задачи используется метод обратной задачи /I/ для класса точно интегрируемых уравнений. В более общих случаях используются различные обобщения метода асимптотических разложений Пуанкаре или Боголюбова – Митропольского на случай распределенных систем /2,3/. В настоящем сообщении мы обратим внимание на то, что для анализа этой же задачи может быть успешно применен и метод Тамма – Данкова /4,5/. Более того, мы считаем, что метод Тамма – Данкова открывает возможность использования современной теории многомерных динамических систем в задачах самолокализации нелинейных полей.

На примере волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = -u + u^3, \qquad (I)$$

самолокализованные малоамплитудные решения которого достаточно подробно исследованы методом Боголюбова – Митропольского (см., напр. /6,7/), мы покажем, что метод Тамма – Данкова позволяет глубже проникнуть в явление самолокализации и снять характерное для метода асимптотических разложений ограничение малоамплитудными состояниями.

Для самолокализованных в пространстве и периодических во времени состояний поля разложение

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} u_{2n+1}(x)\cos(2n+1)\omega t \tag{2}$$

преобразует исходное волновое уравнение (I) в бесконечную последовательность уравнений

$$-\frac{d^2 u_{2n+1}}{dx^2} + \left\{1 - (2n+1)^2\omega^2\right\} u_{2n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial U}{\partial u_{2n+1}}. \tag{3}$$

Здесь

$$U = \frac{3}{8}\,(u_1^4 + u_3^4 + u_5^4) + \frac{1}{2}\,u_1^3 u_3 + \frac{3}{2}\,(u_1^2u_3^2 + u_1^2u_5^2 + u_3^2u_5^2) + \\ + \frac{3}{2}\,(u_1^2u_3u_5 + u_1u_3^2u_5) + \ldots , \tag{4}$$

а не выписанные явно слагаемые содержат амплитудные функции более высокого порядка. Граничным условиям

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0, \quad u(x,\omega t + 2\pi) = u(x,\omega t) \tag{5}$$

в новом представлении соответствует

$$\lim_{x\to\pm\infty} u_{2n+1}(x) = 0, \quad (n\geq 0). \tag{6}$$

Как в методе Тамма – Данкова, так и в методе Боголюбова – Митропольского основная мода исходного приближения определяется решением нелинейного уравнения для $u_1(x)$ в предположении, что все остальные $u_{2n+1}(x)$ при $n>0$ равны нулю. При этом

$$u(x,t) \approx u_1(x)\cos\omega t \approx (\varepsilon/\mathrm{ch}\,\varepsilon x)\cos\omega t, \\ \omega^2 \approx 1 - \mathrm{const}\,\varepsilon^2. \tag{7}$$

Следовательно, самолокализованному состоянию в исходном приближении отвечает сплошной спектр частот $\omega$ (однопараметрическая зависимость частоты от амплитуды). Для отыскания высших мод в методе Боголюбова – Митропольского используется теория возмущений по малой амплитуде основной моды, приводящая лишь к уточнению асимптотических разложений (7). Подробности вычислений могут быть найдены в /6/, а связь между малыми делителями и самолокализованными решениями рассмотрена в /8/.

Таким образом, использование метода Боголюбова – Митропольского приводит к выводу о существовании точных однопараметрических самолокализованных решений для волнового уравнения (I).

В отличие от этого, применение метода Тамма – Данкова к той же задаче приводит к противоположному заключению и, кроме того, ставит под сомнение выводы о существовании точных многосолитонных решений волнового уравнения (I), содержащиеся в /9/.

Действительно, качественный и численный анализ "укороченных" систем нелинейных уравнений, порождаемых исходной системой (3) для векторов состояний

$$(u_1);\ (u_1,u_3);\ (u_1,u_3,u_5)\ldots(u_1,u_3,\ldots,u_{2n+1})\ldots, \tag{8}$$

отвечающих последовательным шагам метода Тамма – Данкова и соответствующих учету все возрастающего числа степеней свободы, показал, что расширение "укороченных" систем после конечного числа шагов всегда приводит к вырождению исходного сплошного спектра в дискретный и дальнейшему полному запрету самолокализованных состояний для всех $\omega>0$. При этом число шагов (и, соответственно, размерность вектора состояний), приводящих к запрету самолокализованных состояний, определяется значением частоты $\omega$. Подчеркнем, что самолокализованным состояниям отвечают сепаратрисные решения – т.е. интегральные кривые, замыкающиеся на особую точку – состояние с нулевым полем. Тип особой точки и, соответственно, число свободных параметров, которые могут быть использованы для замыкания сепаратрис, конечное при любой $\omega>0$, определяются величиной $\omega^2$.

Для значений частот, лежащих в полосе

$$1/9 < \omega^2 < 1, \qquad (9)$$

второй шаг приближения Тамма- Данкова - учет вектора состояний $(u_1, u_3)$ - приводит к вырождению сплошного спектра самолокализованных состояний в дискретный, а следующий шаг - учет вектора состояний $(u_1, u_3, u_5)$ - к запрету самолокализованных состояний. Дальнейшие шаги, связанные с учетом векторов состояний более высокой размерности, не приводят к качественным изменениям решений из-за отсутствия свободных параметров, необходимых для замыкания сепаратрис.

Аналогичная ситуация возникает в полосе частот

$$1/25 < \omega^2 < 1/9 \qquad (10)$$

с тем отличием, что исходная система характеризуется солитонными состояниями для вектора состояний $(u_1, u_3)$ и приводит к запрету самолокализованных состояний при дальнейшем расширении "укороченных" систем. Применение метода Тамма - Данкова к более общему уравнению

$$u_{tt} - u_{xx} = -u + u^3 + c_5 u^5 + c_7 u^7 + \ldots \qquad (11)$$

открывает возможность определения значений параметров $c_{2n+1}$, при которых уравнение (11) оказывается имеющим солитонные решения. При этом при использовании условия замыкания сепаратрисной петли (с одной экстремальной точкой) при расширении "укороченных" систем значения $c_{2n+1}$ оказываются близкими к соответствующим коэффициентам разложения $\sin(u\sqrt{6})$ в степенной ряд. Это указывает на то, что асимптотическое разложение, возникающее в методе Боголюбова - Митропольского (см., напр., /6/), является по-существу приближением к точным малоамплитудным самолокализованным решениям для "близкой" (в меру малости амплитуды) вполне интегрируемой системы - уравнения синус-Гордона, а не исходного уравнения (1).

Еще более существенным обстоятельством является то, что метод Тамма – Данкова открывает возможности поиска нелинейных волновых уравнений, обладающих периодическими во времени и локализованными в пространстве решениями, путем построения нелинейности, сохраняющей самолокализованные состояния поля при расширении "укороченных" систем. Иными словами, условие сохранения сепаратрисных петель при последовательном увеличении размерности векторов состояний (8) определяет параметры нелинейности, заданной, например, в виде (II) или ином более общем виде. Более того, применение метода Тамма – Данкова совместно с другими методами (см., напр., /IO/) дает возможность построения интегрируемых нелинейных полей.

Поступила в редакцию
22 января I98I г.

Литература

I. Теория солитонов: метод обратной задачи. Под ред. С. П. Новикова, "Наука", М., I980 г.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. "Наука", М., I974 г.
3. А. Найфэ, Методы возмущений. "Мир", М., I976 г.
4. И. Е. Тамм, J. Phys. (USSR), 9, 449 (1945).
5. C. M. Dancoff, Phys. Rev., 78, 382 (1950).
6. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, ЖЭТФ, 67, I793 (I974).
7. V. G. Makhankov, Phys. Reports (Sec.C) of Phys. Lett., 35, N 1, 1 (1978).
8. В. М. Елеонский, В. П. Силин, ЖЭТФ, 56, 574 (I969); 57, 478 (I969).
9. Ma Yan-Chow, Stud. Appl. Math., 60, N 1, 73 (1979).
IO. В. Е. Захаров, М. Ф. Иванов, Л. Н. Шур, Письма в ЖЭТФ, 30, 39 (I979).