Краткие сообщения по физике № 10 1981

О КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ОДНОРОДНОМ ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ И ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

В. П. Силин, С. А. Урюпин

УДК 535.34I

Излагается решение уравнения Шредингера для электрона с анизотропным законом дисперсии энергии в постоянном однородном магнитном поле и изменяющемся во времени электрическом поле.

Для теории воздействия сильного электрического поля высокой частоты на электроны проводников, находящихся в квантующем магнитном поле, необходимо знать закономерности квантовомеханического движения электрона в таких полях. В случае монохроматического электрического поля для электрона с изотропным квадратичным законом зависимости энергии от импульса волновая функция получена в работах /I,2/. В настоящей заметке излагается решение уравнения Шредингера для произвольной, вообще говоря, не периодической зависимости электрического поля от времени в случае квадратичного, но неизотропного закона дисперсии электрона. Выбирая векторный потенциал электромагнитного поля в виде

$$\vec{A}(t,x) = \left\{A_x(t),\ A_y(t) + Bx,\ A_z(t)\right\}, \tag{I}$$

чему отвечает $\mathrm{rot}\,\vec{A}(t,x) = \vec{B} = (0,0,B)$, $-c^{-1}\dot{\vec{A}}(t,x) = \vec{E}(t)$, можем записать уравнение Шредингера в виде

$$i\hbar\dot{\psi}(\vec{r},t) = \left\{\frac{1}{2m_0}\sum_{ij} a_{ij}\left[\hat{p}_i + \frac{e}{c}A_i(t,x)\right]\left[\hat{p}_j + \frac{e}{c}A_j(t,x)\right] - \hat{\mu}_z B\right\}\times$$
$$\times\,\psi(\vec{r},t). \tag{2}$$

Здесь m_o – масса свободного электрона, $a_{ij} = m_o m_{ij}^{-1}$, m_{ij}^{-1} – компоненты тензора обратной эффективной массы, $\hat{p}$ – оператор канонического импульса электрона, $e > 0$ – абсолютная величина заряда электрона, $\hat{\mu}_z$ – оператор проекции эффективного магнитного момента на направление постоянного магнитного поля.

Рассмотрим следующую начальную задачу. В бесконечном прошлом $t = -\infty$ электрическое поле равно нулю, а электрон находится в стационарном состоянии $\psi_\nu^o(\vec{r},t)$, где $\psi_\nu^o(\vec{r},t)$ – волновая функция электрона в однородном магнитном поле, $\nu = n, p_y, p_z, s_z$ – совокупность квантовых чисел электрона. Требуется найти решение уравнения (2) в момент времени t, когда электрическое поле отлично от нуля.

Используемая нами калибровка электромагнитного поля (I) приводит к коммутации оператора Гамильтона с операторами $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$, $\hat{\mu}_z$. Это позволяет по аналогии с работами /3,4/ (ср. /5/) представить решение уравнения (2) в виде:

$$\psi(\vec{r},t) = \varkappa_{s_z}(\sigma)(L_y L_z)^{-1/2}\exp\left[-i\alpha(x) + \frac{i}{\hbar} p_y y + \frac{i}{\hbar} p_z z\right]\varphi(x,t),$$
$$\alpha(x) = (a_{xy}p_y + a_{xz}p_z + \hbar x a_{xy}/2\lambda_o^2)x/\hbar a_{xx}, \quad \lambda_o^2 = c\hbar/eB, \tag{3}$$

$\varkappa_{s_z}(\sigma)$ – спиновая функция электрона, L_y, L_z – линейные пространственные размеры вдоль осей y и z, нормирующие волновую функцию. Выделение множителя $\exp[-i\alpha(x)]$ обеспечивает получение для $\varphi(x,t)$ уравнения, по виду аналогичного уравнению Шредингера для электрона с изотропным законом дисперсии (ср. /3,4/):

$$i\hbar\dot{\varphi}(x,t) = \left\{\frac{a_{xx}}{2m_o}\left[\hat{p}_x + \frac{e}{c}\tilde{A}_x(t)\right]^2 + \mu_B s_z B + \frac{\mu_{zz}}{2m_o a_{xx}} \times \right.$$
$$\left. \times\left[\frac{\hbar}{\lambda_o^2}(x - x_o) + \frac{e}{c}\tilde{A}_y(t)\right]^2 + \frac{1}{2m}\left[p_z + \frac{e}{c}A_z(t)\right]^2\right\}\varphi(x,t), \tag{4}$$

где $\mu_b = e\hbar/2m_o c$, $s_z = \pm 1$ – спиновое квантовое число, μ_{ij} – минор элемента a_{ij} определителя $\Delta = \det(a_{ij})$, $m = m_o\mu_{zz}\Delta^{-1}$,

$$x_0 = -\lambda_0^2\hbar^{-1}(p_y + p_z\mu_{yz}\mu_{zz}^{-1}), \tag{5}$$

$$\tilde{A}_x(t) = a_{xx}^{-1}\left[a_{xx}A_x(t) + a_{xy}A_y(t) + a_{xz}A_z(t)\right], \tag{6}$$

$$\tilde{A}_y(t) = A_y(t) + A_z(t)\mu_{yz}\mu_{zz}^{-1}. \tag{7}$$

В соответствии с работами /I,2/ решение уравнения (4), отвечающее начальному условию $\psi(\vec{r}, t = -\infty) = \psi_\nu^0(\vec{r}, t = -\infty)$, можно представить в виде:

$$\varphi(x,t) = (2^n n!\sqrt{\pi}\lambda)^{-1/2} \exp\Big\{- i\omega_c t(n + 1/2) - \frac{i}{\hbar}\mu_b s_z Bt - i\frac{p_z^2}{2m\hbar}t - \frac{ie}{m\hbar c}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \left[p_z A_z(t') + \frac{e}{2c}A_z^2(t')\right] + \frac{i}{\hbar}F(t) - \frac{\left[x - x_0 - \eta(t)\right]^2}{2\lambda^2} + \frac{if(t)}{\hbar\lambda}\left[x - x_0 - \eta(t)\right]\Big\} \times H_n\left[\frac{x - x_0 - \eta(t)}{\lambda}\right]; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 a_{xx}/\sqrt{\mu_{zz}}; \quad \omega_c = eB\sqrt{\mu_{zz}}/m_0 c.$$

Зависящие от времени неизвестные функции $\eta(t)$, $f(t)$, $F(t)$ найдем из уравнений

$$\eta(t) + \tilde{A}_y(t)B^{-1} + \lambda\dot{f}(t)/\hbar\omega_c = 0, \tag{9}$$

$$f(t) + \lambda\frac{e}{c}\tilde{A}_x(t) - \hbar\dot{\eta}(t)/\lambda\omega_c = 0, \tag{10}$$

$$\dot{F}(t) - \dot{\eta}(t)\frac{f(t)}{\lambda} + \frac{1}{2\hbar\omega_c}\left[\dot{f}(t)\right]^2 + \frac{\hbar}{2\omega_c\lambda^2}\left[\dot{\eta}(t)\right]^2 = 0. \tag{11}$$

Решение уравнений (9)-(II), отвечающее включению переменного электрического поля в бесконечном прошлом $t = -\infty$, имеет вид:

$$f(t) = -\frac{\hbar\omega_c}{B\lambda}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \left\{\frac{a_{xx}}{\sqrt{\mu_{zz}}}\tilde{A}_x(t')\sin\omega_c(t - t') + \right. \tag{I2}$$

$$\left. + \tilde{A}_y(t')\cos\omega_c(t - t')\right\},$$

$$\eta(t) = \frac{\omega_c}{B}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \left\{\frac{a_{xx}}{\sqrt{\mu_{zz}}}\tilde{A}_x(t')\cos\omega_c(t - t') - \right. \tag{I3}$$

$$\left. - \tilde{A}_y(t')\sin\omega_c(t - t')\right\},$$

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \left\{\frac{\dot{\eta}(t')f(t')}{\lambda} - \frac{\hbar}{2\omega_c\lambda^2}[\dot{\eta}(t')]^2 - \frac{1}{2\hbar\omega_c}[\dot{f}(t')]^2\right\}. \tag{I4}$$

Формулы (3), (8), (I2–I4) определяют волновую функцию электрона в произвольный момент времени t. В заключение, имея ввиду использование приведенных здесь результатов в теории гальваномагнитных явлений проводников, выпишем выражение для матричного элемента оператора кинематического импульса электрона:

$$\int d\vec{r}\psi^*_{\nu}(\vec{r},t)\left[\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A}(t,x)\right]\psi_{\nu'}(\vec{r},t) = \frac{(2\pi\hbar)^2}{L_yL_z}\delta_{s_z,s_z'}\delta(p_y' - p_y)\times$$

$$\times\delta(p_z' - p_z)\exp\left\{i\omega_c(n - n')t\right\}\left\{\left[\frac{f(t)}{\lambda} + \frac{e}{c}A_x(t) + \frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}}p_z - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\hbar a_{xy}}{a_{xx}\lambda_o^2}\eta(t)\right]\delta_{n',n} - \frac{\hbar}{\lambda\sqrt{2}}\sqrt{n + 1}\delta_{n',n+1}\left[i + \frac{a_{xy}\lambda^2}{a_{xx}\lambda_o^2}\right] - \tag{I5}$$

$$- \frac{\hbar}{\lambda\sqrt{2}}\sqrt{n}\delta_{n',n-1}\left[\frac{a_{xy}\lambda^2}{a_{xx}\lambda_o^2} - i\right], \left[\frac{\hbar}{\lambda_o^2}\eta(t) + \frac{e}{c}A_y(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}}p_z\right]\delta_{n',n} + \frac{\hbar\lambda}{\lambda_o^2\sqrt{2}}\left[\sqrt{n + 1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right],$$

$$\left.\left[p_z + \frac{e}{c}A_z(t)\right]\delta_{n',n}\right\}.$$

Поступила в редакцию
I июня 198I г.

Литература

1. M. Weiler, M. Reine, B. Lax, Phys. Rev., 171, 949 (1968).
2. В. П. Олейник, УФЖ, 13, 1205 (1968).
3. В. А. Чуенков, Э. И. Идаятов, Препринт ФИАН № 5, М., 1973 г.
4. В. П. Силин, С. А. Урюпин, ФТТ, 20, 3033 (1978).
5. Л. Э. Гуревич, И. П. Ипатова, ЖЭТФ, 37, 1324 (1959).