

О ПУЧКОВЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ В КОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ
 ВБЛИЗИ ПОЛОС НЕПРОЗРАЧНОСТИ

М. В. Кузелев, Е. Д. Поезд, А. А. Гухадзе

УДК 531.9

Рассмотрена задача об устойчивости электронного пучка в ограниченной системе вблизи полосы прозрачности. Показано, что дисперсионное соотношение при этом сводится к уравнению четвертого порядка. Найдены пороговые условия развития неустойчивости.

Исследование устойчивости электронного пучка в ограниченной системе (волноводе, плазме и т.д.) сводится к решению дисперсионного уравнения вида /1/

$$D(\omega, k) = A(\omega, k)(\omega - ku_{\parallel} - \omega_1)^{-2}. \quad (1)$$

Здесь $u_{\parallel} > 0$ — продольная составляющая скорости электронов пучка, ω_1 — некоторая характерная частота, $A(\omega, k)$ — функция, пропорциональная плотности электронов, ω — частота волны, k — продольная составляющая волнового вектора.

Вблизи резонансной точки ω_0, k_0 , являющейся действительным решением системы

$$\left. \begin{aligned} D(\omega, k) &= 0, \\ \omega - ku_{\parallel} - \omega_1 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$(x - y)^2(y^2 + \alpha x - \beta y) = \text{sign } a, \quad (2)$$

где $a = u_{\parallel}^{-2} A(\omega_0, k_0)$, $\alpha = |a|^{-1/4} |u_{\parallel} D_{\omega}(\omega_0, k_0)|$, $\beta = v_0 D_k(\omega_0, k_0) / |a|^{1/4}$,
 $v_0 = -D_k / D_{\omega}$, $x = (\omega - \omega_0) / u_{\parallel} |a|^{1/4}$, $y = (k - k_0) / |a|^{1/4}$.

Для электронных пучков малой плотности параметр α является большой величиной.

В области прозрачности групповая скорость v_0 велика и уравнение (2) сводится к кубическому (см. /1-3/ и цитированную там литературу). Ниже будет рассмотрен противоположный случай - неустойчивость на границе области прозрачности, когда $v_0 = 0$ и уравнение (2) сводится к уравнению четвертого порядка:

$$(x - y)^2(y^2 + \alpha x) = \text{sign } a. \quad (3)$$

При анализе уравнения (3) будем различать четыре случая:

$$\text{а) } \alpha > 0, \quad a > 0; \quad \text{в) } \alpha < 0, \quad a > 0;$$

$$\text{б) } \alpha > 0, \quad a < 0; \quad \text{г) } \alpha < 0, \quad a < 0.$$

Соответствующие дисперсионные кривые показаны на рис. 1, из которого следует, что в случаях а) и б) зоны усиления и не-пропускания колебаний расположены в различных областях частот. Иная ситуация имеет место в случаях в) и г). Так как кривые а) и в) топологически эквивалентны кривым б) и г) соответственно, остановимся только на исследовании двух последних. Отметим, что при построении дисперсионных кривых считалось выполненным неравенство

$$|\alpha| > |x|, \quad \text{или} \quad u_{||}^2 |D_{\omega}| > |\omega - \omega_0|,$$

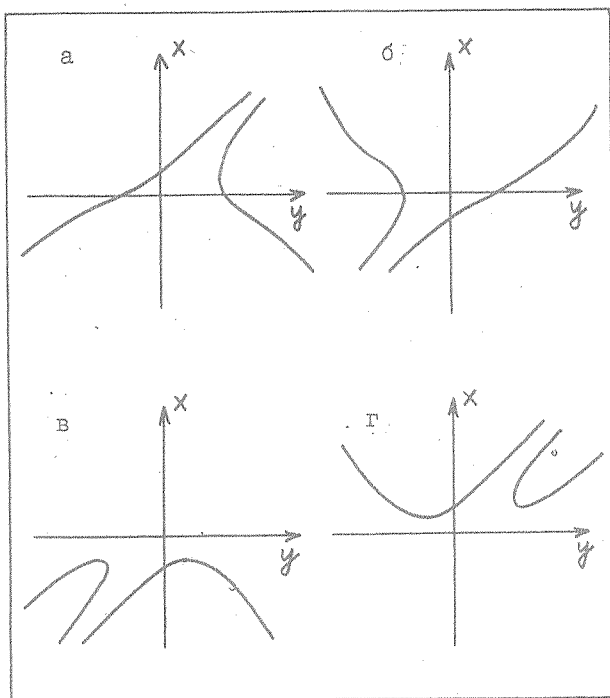
по существу эквивалентное условию $|\omega_0| > |\omega - \omega_0|$.

Для дальнейшего понадобятся только предельные (при $|\alpha x| \gg 1$) выражения корней уравнения (3)

$$y_{1,2} = x \pm (-\text{sign } a/|\alpha|x)^{1/2},$$

$$y_{3,4} = \pm \sqrt{|\alpha|x}.$$

Отсюда видно, что волны $y_{1,2,3}$ распространяются в сторону пучка, а волна y_4 им навстречу.



Р и с. 1. Дисперсионные кривые при резонансе на краю полосы прозрачности

Исследуем на устойчивость систему конечной длины около полосы непрозрачности, для чего получим характеристическое уравнение для определения x . Решение задачи ищем в виде:

$$\sum_{j=1}^4 C_j \exp(iy_j \xi),$$

где C_j - постоянные, а ξ - безразмерная продольная координата. Для исключения постоянных C_j используем граничные условия. На входном конце системы ($\xi = 0$), откуда инжектируется пучок, имеют место полное отражение волны u_4 и отсутствие возмущений в пучке:

$$\sum_{j=1}^4 c_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{c_j}{(x - y_j)^2} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{y_j c_j}{(x - y_j)^2} = 0. \quad (4)$$

На выходном конце ($x = S$) потребуем идеального согласования беспучковой системы с излучающим устройством:

$$(y_3 - y_1)c_1 e^{iy_1 S} + (y_3 - y_2)c_2 e^{iy_2 S} + (y_3 - y_4)c_4 e^{iy_4 S} = 0. \quad (5)$$

Из (4) и (5), с учетом $|\alpha x| \gg 1$, следует характеристическое уравнение

$$\alpha_{14} e^{iy_1 S} + \alpha_{24} e^{iy_2 S} + 2e^{iy_4 S} = 0, \quad (6)$$

где

$$\alpha_{14} = -\alpha_{24} = i(|\alpha x|)^{-1}.$$

Будем интересоваться порогами развития неустойчивости, т.е. только действительными относительно x решениями уравнения (6). Нетрудно показать, что в случае г) уравнение (6) таких решений не имеет, т.е. неустойчивости нет. Это связано с тем, что в случае г) зоны усиления и непропускания колебаний совпадают и волна обратной связи u_4 не распространяется. В случае же б) из (6) следуют соотношения

$$|\alpha x S^2 = p^2 \equiv \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (7)$$

$$S^2 = pq,$$

где q — корень уравнения $q = \ln 2p/q$. Первое соотношение определяет собственные частоты, а второе пороги развития неустойчивости. Из (7) следует, что $|\alpha x| \approx 3$ при $n = 1$ и $|\alpha x| \approx 5$ при $n = 2$, т.е. неравенство $|\alpha x| \gg 1$, хотя и не очень хорошо, но удовлетворяется. Можно показать, что в противоположном пределе характеристическое уравнение решений не имеет. Следовательно, приближенные решения (7) являются единственными.

Используя (2), перепишем (7) в виде

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + p^2 L^{-2} |D_\omega|^{-1}, \\ A(\omega_0, k_0) &= p^2 q^2 u_{\parallel}^2 L^{-4}.\end{aligned}\quad (8)$$

Так как $A(\omega_0, k_0)$ пропорциональна плотности электронов пучка, то $J_b(n=2)/J_b(n=1) \approx 9$, где $J_b(n=1)$ и $J_b(n=2)$ стартовые токи начала неустойчивости на первой и второй модах n соответственно. Стартовые токи возбуждения высших мод еще больше.

Рассмотрим примеры.

а) Циклотронная неустойчивость на волноводной моде Н-типа описывается уравнением вида (I), в котором /I/

$$\begin{aligned}D(\omega, k) &= k_{\perp}^2 + k^2 - \omega^2/c^2, \quad \omega_1 = \omega_H/\gamma, \\ A &= G\omega_b^2(k_{\perp}^2 u_{\perp}^2/2\gamma c^2).\end{aligned}$$

Здесь u_{\perp} и k_{\perp} — поперечные составляющие скорости электрона и волнового вектора, ω_H — циклотронная частота, $\gamma = [1 - (u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2)/c^2]^{-1/2}$, ω_b — ленгмювская частота электронов пучка, а G — геометрический фактор. Резонанс на краю области прозрачности реализуется, если $\omega_H/\gamma = k_{\perp}c$. Такая система, называемая гиротроном /3/ соответствует случаю б) и описывается формулами (8).

б) Неустойчивость прямолинейного пучка электронов в гофрированном волноводе описывается уравнением вида (I), в котором /4/

$$\begin{aligned}D(\omega, k) &= k_{\perp}^2 + k^2 - \omega^2/c^2, \quad \omega_1 = \tilde{k}u_{\parallel}, \\ A &= -\frac{1}{2} h^2 k^2 \frac{\omega_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{k^2 u_{\parallel}^2 \gamma^2} \right) G\omega_b^2 \gamma^{-3},\end{aligned}\quad (9)$$

где h — глубина гофрировки, а $2\pi/\tilde{k}$ — ее период. На краю нижней зоны непрозрачности $\tilde{k}u_{\parallel} = k_{\perp}c$. Система (9) соответствует случаю г) и неустойчивость в ней невозможна.

Поступила в редакцию
29 июня 1981 г.

Л и т е р а т у р а

1. Л. С. Богданкевич, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, УФН, 133, вып. I, 3 (1981).
2. А. А. Рухадзе и др., Физика сильнооточных релятивистских электронных пучков, Атомиздат, М., 1980 г., с. 168.
3. В. Л. Братман и др., в сб. Релятивистская высокочастотная электроника, под редакцией А. В. Галонова-Грекова, Горький, 1979 г., с. 157.
4. Л. С. Богданкевич, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, ИТФ, 50, вып. 2, 233 (1980).