

О СПЕКТРАХ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
В ПЛАЗМЕ

В. Ю. Бычков, В. П. Силин

УДК 533.951

Найдены спектры ионно-звуковой турбулентности магнитоактивной плазмы, отвечающие резко выделенной угловой зависимости и детализирующие спектр Кадомцева - Петвиашвили.

Одной из важных особенностей, характеризующих различные типы ионно-звуковых неустойчивостей плазмы, является угловая зависимость инкремента. Поскольку теория не определяла законов распределения ионно-звуковых турбулентных флуктуаций по углам, ограничиваясь распределением по частотам Кадомцева - Петвиашвили /2/, то влияние угловой зависимости инкремента на ионно-звуковую турбулентность (ИЗТ) оставалось до сих пор не изученным. В работе /2/ в рамках модели /1/ было найдено стационарное, в том числе и угловое, распределение ИЗТ в плазме без магнитного поля. В настоящем сообщении подход работы /2/ распространен на случай плазмы в магнитном поле, что позволило выявить своеобразие углового распределения ИЗТ плазмы с замагниченными электронами.

Ниже для определенности будем говорить о ионно-звуковой неустойчивости, инициируемой током, поскольку обобщение, например, на случай неустойчивости, обусловленной тепловым потоком, проводится тривиально (см. /2/). Магнитное поле будем считать ориентированным вдоль направления токовой скорости \vec{u} . В работе /2/ показано, что теория ИЗТ допускает существование сильно анизотропных квазистационарных спектров вида

$$N(\vec{k}) = N(k, \theta) = N(k) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0), \quad (I)$$

где $N(\vec{k})$ - число ионно-звуковых волн с волновым вектором \vec{k} , θ - угол между направлением токовой скорости и волновым вектором. Распределение турбулентных шумов $N(k)$ и угол θ_0 , определяющий направление угловой анизотропии турбулентности, находятся из условий

$$\gamma_{NL}(k, \theta_0) = 0, \quad (2)$$

$$\partial \gamma_{NL}(k, \theta) / \partial \cos \theta \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad (3)$$

$$\partial^2 \gamma_{NL}(k, \theta) / \partial (\cos \theta)^2 \Big|_{\theta=\theta_0} < 0 \quad (4)$$

обращения в нуль максимума нелинейного инкремента

$$\gamma_{NL}(k, \theta) = \gamma(k, \theta) + \frac{k^2 v_{Ti}^2}{4\pi n_e e T_e} \frac{\partial}{\partial k} k^4 \int d\theta' \sin \theta' Q(\cos \theta, \cos \theta') N(k, \theta'). \quad (5)$$

Здесь γ - линейный инкремент неустойчивости, T_e - температура электронов (с плотностью n_e), существенно превосходящая температуру ионов, v_{Ti} - тепловая скорость ионов, k - постоянная Больцмана. Вторым слагаемым в правой части формулы (5), обусловленным нелинейным затуханием ионного звука на ионах, определяется насыщение неустойчивости $/I/$. Для величины $Q(\cos \theta, \cos \theta')$ имеем $/2/$:

$$Q(x, y) = x^2 y^2 + (1/2)(1 - x^2)(1 - y^2) - x^4 y^4 - (3/8)(1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 - 3x^2 y^2 (1 - x^2)(1 - y^2). \quad (6)$$

Соотношение (5) записано в условиях $k r_{De} \ll 1$ (r_{De} - дебаевский радиус электронов), поскольку именно эта область длин волн вносит вклад в энергию ИЗТ $/1-3/$.

Формулы (5) и (6) описывают нелинейное взаимодействие волн в плазме в магнитном поле только лишь для не слишком длинных волн, когда $k r_{De} > \Omega_i / \omega_{Li}$, где $\Omega_i(e)$ - циклотронная ионная (электронная) частота, $\omega_{Li}(e)$ - ленгмювская ионная (электронная) частота. Такое условие будем считать выполненным.

Обратимся сначала к рассмотрению случая полностью замагниченного движения электронов, когда

$$kr_e \ll 1, \quad (7)$$

что в условиях $kr_{De} < 1$ выполняется в сильном магнитном поле $\Omega_e \gg \omega_{Le}$. Тогда для инкремента ионно-звуковой неустойчивости имеем

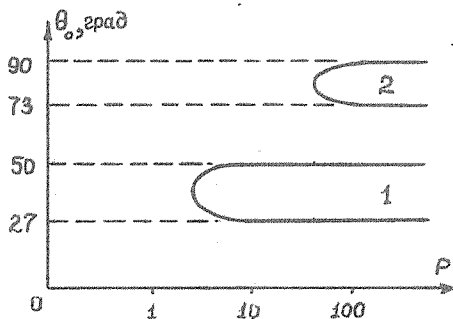
$$\gamma(k, \theta) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} kv_s \frac{pcos\theta - 1}{|cos\theta|}, \quad (8)$$

где v_s - скорость ионного звука, $p = u/v_s$ - надпороговость. Используя выражение (8), получаем в области $kr_{De} < 1$ следующее решение уравнения (2):

$$N(k) = \frac{4\pi n_e e T_e}{k^2 v_{Ti}^2} \frac{\gamma(k, \theta_0)}{Q(cos\theta_0, cos\theta_0)} \ln \frac{1}{kr_{De}}. \quad (9)$$

Зависимость этого решения от волнового числа k отвечает спектру Кадомцева - Петвиашвили. Величина θ_0 , согласно уравнению (3) и выражению (9), определяется уравнением:

$$Q(cos\theta_0, cos\theta_0) = cos\theta_0 (pcos\theta_0 - 1) \partial Q(cos\theta, cos\theta_0) / \partial cos\theta |_{\theta=\theta_0}. \quad (10)$$



Р и с. I. Решение уравнения (10) как функция надпороговости

Решение уравнения (10) $\theta_0(p)$ как функция надпороговости изображено на рис. 1. Из этого рисунка видно, что при $1 \leq p \leq 2$ уравнение (10) решений не имеет. При $2 \leq p \leq 70$ возникают два корня (кривая 1 рис. 1) $\theta_{01}^{(1)}$ и $\theta_{02}^{(1)}$. В случае $p = 2$ имеем $\theta_{01}^{(1)} = \theta_{02}^{(1)} \approx 37^\circ$, а в пределе $p \gg 1$ получаем $\theta_{01}^{(1)} \approx 27^\circ$, $\theta_{02}^{(1)} \approx 50^\circ$. При больших надпороговостях $p \gg 70$ уравнение (10) имеет четыре корня, отвечающих кривым 1 и 2 на рис. 1, то есть наряду с $\theta_{01}^{(1)}$, $\theta_{02}^{(1)}$ возникают решения $73^\circ < \theta_{01}^{(2)} < \theta_{02}^{(2)} < 90^\circ$, асимптотические значения которых при $p \rightarrow \infty$ оказываются равными $\theta_{01}^{(2)} \approx 73^\circ$, $\theta_{02}^{(2)} \approx 90^\circ$, причем $\cos \theta_{02}^{(2)} \approx (4p)^{-1/3}$. При $p = 70$ имеем $\theta_{01}^{(2)} \approx \theta_{02}^{(2)} \approx 77^\circ$. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что неравенство (4), записывающееся в виде

$$2\partial Q(\cos \theta, \cos \theta_0) / \partial \cos \theta \Big|_{\theta=\theta_0} + \cos \theta_0 \partial^2 Q(\cos \theta, \cos \theta_0) / \partial (\cos \theta)^2 \Big|_{\theta=\theta_0} > 0, \quad (11)$$

выполняется для всех возможных решений уравнения (10).

Таким образом, в фазовом пространстве волновых векторов область турбулентности в магнитоактивной плазме, также как и в плазме без магнитного поля, представляет собой конус, причем, порог возникновения состояния с такой сингулярной областью турбулентности превышает порог ионно-звуковой неустойчивости. В отличие от плазмы без магнитного поля, число возможных конусных состояний возрастает от двух /2/ до четырех. Обратим внимание, что в пределе $p \rightarrow \infty$ зависимость инкремента (8) от угла сводится к $\text{sign} \cos \theta$. Тем не менее возникает несколько возможных предельных значений θ_0 .

Обратимся теперь к случаю сравнительно слабых магнитных полей, когда $\Omega_e \ll \omega_{Le}$. Тогда в фазовом пространстве волновых векторов возникает область

$$kp_e > 1 > kr_{De}, \quad (12)$$

дополняющая рассмотренную выше область турбулентности (7). При этом в области (12) влияние магнитного поля на электроны оказывается существенным для почти поперечного распространения ионного звука, когда

$$kr_e \cos \theta \ll 1, \quad (13)$$

а для инкремента неустойчивости вместо (8) имеем

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \right)^2 \Omega_e \frac{p \cos \theta - 1}{|\cos \theta| \sin \theta}. \quad (14)$$

При этом $|\cos \theta| \gg (\omega_{Li}/\omega_{Le})$.

Покажем теперь, что в условиях (12), (13) возможно существование конусного спектра с углом $\theta_0 \approx \pi/2$. Действительно, уравнение (3) при использовании (14) и (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} & [1 + \text{ctg}^2 \theta_0 (p \cos \theta_0 - 1)] Q(\cos \theta_0, \cos \theta_0) = \\ & = \cos \theta_0 (p \cos \theta_0 - 1) \left. \frac{\partial Q(\cos \theta, \cos \theta_0)}{\partial \cos \theta} \right|_{\theta = \theta_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

В пределе $p \gg 1$ это уравнение имеет решение $\cos \theta_0 \approx (3p)^{-1/3}$, которое удовлетворяет неравенству (4). Наконец, распределение энергии ионного звука по абсолютным значениям волновых чисел дается формулой:

$$N(k) = 32\pi n_e \omega_{Te} \gamma(\theta_0) / k^5 v_{Ti}^2, \quad (16)$$

где $\gamma(\theta_0) = (\omega_{Li}/2\omega_{Le})^2 \Omega_e p$. Таким образом, при $\omega_{Le} \gg \Omega_e$ в коротковолновой области $k \gg p^{-1}$ в условиях сильной надпороговости $p \gg 1$ устанавливается стационарное распределение турбулентных пульсаций на конусе почти перпендикулярном направлению тока. При этом с уменьшением длины волны интенсивность пульсаций спадает быстрее, чем в случае спектра Кадамцева - Петвиашвили.

Нам представляется, что вопрос о том, какое из четырех найденных конусных распределений ИЗТ в случае сильного магнитного поля ($\Omega_e \geq \omega_{Le}$) реализуется на опыте, следует ставить применительно к конкретным условиям эксперимента. Вместе с тем уже сейчас имеется экспериментальное свидетельство возбуждения ИЗТ в направлении поперек тока, полученное в работе /4/ в условиях

$\omega_{Le} \approx \Omega_e$, $p \approx 50 - 80$, отвечающее установленной нами возможности генерации шумов поперек тока ($p \geq 70$ при $\Omega_e \geq \omega_{Le}$).

Поступила в редакцию

10 июля 1981 г.

Л и т е р а т у р а

1. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, в сб. Вопросы теории плазмы, 4, М., Атомиздат, 1964 г., с. 258.
2. В. Ю. Быченко, В. П. Силли, ДАН СССР, 260, № 5 (1981).
3. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Нелинейная теория плазмы, в сб. Вопросы теории плазмы, 7, М., Атомиздат, 1973 г., с. 101.
4. W. Gekeiman, R. L. Stenzel, Phys. Fluids, 21, 2014 (1978).