Краткие сообщения по физике № 2 1980

СПЕКТР КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ

А. Д. Заикин, Г. Ф. Жарков

УДК 536.48

Найден спектр малых колебаний в системе джозефсоновских переходов в присутствии внешнего магнитного поля. Показано, что скорость распространения колебаний существенно зависит от направления волны и магнитного поля и обладает пороговой частотой.

Вопросу о дисперсии малых колебаний в джозефсоновском переходе посвящено довольно много работ (см., например, /I-6/). Здесь мы рассмотрим такие колебания в несколько иной системе. Пусть имеется большое количество джозефсоновских переходов, которые разделены отверстиями в массивном сверхпроводнике (рис. I). Длина каждого из переходов L, площадь отверстия σ[*]. Будем считать, что система помещена во внешнее магнитное поле и находится в устойчивом стационарном состоянии, при этом в переходе с номером n существует определенное распределение разности фаз параметров порядка $\varphi_{on}(x)$. Функция $\varphi_{on}(x)$ удовлетворяет уравнению

---

[*] Мы будем пользоваться безразмерными единицами. Так, длина перехода измеряется в единицах джозефсоновской длины $\lambda_J \sim 0,1$ мм, безразмерная площадь есть $\sigma = S/\lambda_J\Lambda$, S – площадь в обычных единицах, Λ – эффективная толщина слоя в переходе (в направлении z), в котором присутствует магнитное поле ($\Lambda \sim 10^{-5}$ см), время измеряется в единицах $\omega_0^{-1} = \lambda_J/c_0 \sim 10^{-11}$ с, c_0 – скорость распространения электромагнитных волн вдоль поверхности туннельного перехода. За единицу магнитного поля принимается величина $H_J = \Phi_0/2\pi\lambda_J\Lambda \sim 0,1 \div 1$ гс, $\Phi_0 = 2\cdot10^{-7}$ гс·см^2 – квант потока.

$$\frac{d^2\varphi_{on}}{dx^2} = \sin\varphi_{on} \tag{I}$$

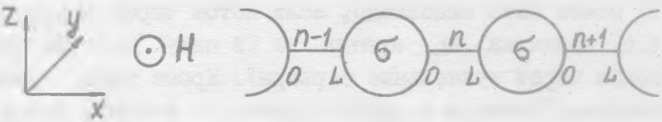
и граничным условиям

$$\sigma \left.\frac{d\varphi_{on}}{dx}\right|_0 = \varphi_{on}(0) - \varphi_{on-1}(L), \quad \left.\frac{d\varphi_{on}}{dx}\right|_0 = \left.\frac{d\varphi_{on-1}}{dx}\right|_L. \tag{2}$$

Здесь $d\varphi_{on}/dx = H_n$ – магнитное поле в отверстии с номером n.

Пусть теперь в системе произошло отклонение от равновесного распределения магнитного поля и тока

$$\varphi_n(x,y,t) = \varphi_{on}(x) + \psi_n(x,y,t), \quad \psi_n \ll 1. \tag{3}$$



Р и с. I.

Если пренебречь диссипацией, связанной с наличием нормальной составляющей тока в переходе, то функция φ_n должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2} + \sin\varphi_n = 0. \tag{4}$$

Используя (3) и (4) и представляя ψ_n в виде

$$\psi_n(x,y,t) = \psi_n(x)e^{i\omega t - iky},$$

сразу получим

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + (\omega^2 - k^2)\psi_n = \psi_n \cos\varphi_{on}. \tag{5}$$

Уравнение (5) сводится к уравнению Ламе, решение которого может быть записано через эллиптические функции Якоби. При этом задача в принципе может быть решена аналитически (что и проделано для ряда случаев в работах /2-6/), однако, соответствующие расчеты оказываются довольно громоздкими. Между тем физическая картина распространения малых колебаний в рассматриваемой системе довольно проста и может быть описана без привлечения таких расчетов.

Пусть $L \ll 1$. Тогда можно пренебречь зависимостью разности фаз φ_{on} от x. С помощью граничных условий в этом случае можно получить

$$\delta H_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n, \quad \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n = L \sin \varphi_n. \qquad (6)$$

Установим закон дисперсии малых колебаний в системе, если для всех n выполнено условие

$$\cos \varphi_{on} = \cos \varphi_o. \qquad (7)$$

Здесь φ_o – константа. С помощью (6) легко установить, что условие (7) может быть выполнено, если поток через отверстия квантован, т.е. величина δH_n кратна 2π (в силу $L \ll 1$ мы пренебрегаем потоком через туннельные барьеры). Кроме того, соотношение (7) справедливо также и в другом случае. А именно, пусть $\varphi_{on} = (-1)^n \varphi_o$, при этом из (6) видно, что такое распределение разности фаз по переходам имеет место, если

$$4\varphi_o + L \sin \varphi_o = 0.$$

Требование устойчивости рассматриваемых распределений поля и токов в системе дает /8/ $\cos \varphi_o > 0$. При условии (7) функцию $\psi_n(x)$ можно представить в виде

$$\psi_n(x) = \psi(x) e^{iqLn}. \qquad (8)$$

Ясно, что функция φ_n должна удовлетворять тем же граничным условиям (2), что и φ_{on}. Отсюда при учете (8) сразу находим граничные условия для функции $\psi(x)$:

$$\sigma \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_0 = \psi(0) - \psi(L) e^{-iqL}, \quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_0 = \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_L e^{-iqL}. \qquad (9)$$

Решение уравнения (5), как обычно, ищем в виде

$$\psi(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \quad \alpha^2 = \omega^2 - k^2 - \cos \varphi_o. \qquad (10)$$

Подставляя (I) в граничные условия (9) и приравнивая детерминант получившейся системы уравнений для А и В нулю, найдем

$$\frac{1}{2} \sigma\alpha \sin \alpha L - \cos \alpha L + \cos qL = 0,$$

откуда при не слишком больших α для случая $L \ll 1$ приходим к дисперсионному уравнению

$$\omega_{qk}^2 = \omega_0^2 \cos\varphi_0 + c_0 k^2 + c_0^2(4\Lambda/SL)\sin^2(qL/2). \qquad (11)$$

В соотношении (11) мы перешли к размерным переменным.

Видно, что в системе возможно распространение волн вдоль направления магнитного поля со скоростью, равной скорости волн Свихарта c_0. Этот результат полностью совпадает с результатом Кулика /2/, который показал, что вдоль вихревых нитей в джозефсоновском переходе распространяются упругие волны, скорость которых также равна c_0. Из (11), кроме того, следует, что волны распространяются и в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Такие колебания можно уподобить акустическим колебаниям цепочки атомов. Роль "массы атома" в этом случае играет индуктивность "элементарной ячейки" рассматриваемой системы $\mathcal{L}$, которая имеет особенно простой вид в безразмерных переменных /7,8/.

$$\mathcal{L} = \sigma L.$$

"Зона Бриллюэна", как обычно, определяется условием

$$-\pi \leqslant qL < \pi. \qquad (12)$$

Для длинноволновых колебаний $qL \ll 1$ спектр имеет "плазменный" вид

$$\omega_{qk}^2 = \omega_0^2 \cos\varphi_0 + c_0^2 k^2 + c_0^2 \frac{L\Lambda}{S} q^2. \qquad (13)$$

Скорость распространения волн вдоль направления x не зависит от магнитного поля. Отметим, что скорость волн, которые распространяются поперек решетки вихрей в длинном джозефсоновском переходе, существенно зависит от магнитного поля и, вообще говоря, определяется довольно сложным выражением /2,3/. Заметим еще, что спектр (11) обладает пороговой частотой, которая определяется величиной токов в системе. В случае $\varphi_0 = 0$ (отсутствие поля и токов) эта частота равна ω_0 и совпадает с пороговой частотой спектра малых колебаний в длинном переходе, который также находится в мейсснеровском состоянии /1/. При наличии в переходе решетки вихрей такая частота отсутствует /2/, поскольку среднее значение величины $\cos\varphi$ в этом случае равно нулю. В этой связи можно сказать еще, что спектр колебаний в рассматриваемой системе всегда (а не только при условии (7)) будет обладать пороговой частотой, поскольку распределение разности фаз φ_{0n} устойчиво только при условии $\cos\varphi_{0n} > 0$, которое должно выполняться для всех n.

Поступила в редакцию 8 октября 1979 г.

Литература

1. B. D. Josephson, Adv. Phys. 14, 419 (1965).
2. И. О. Кулик, ЖЭТФ, 51, 1952 (1966).
3. P. Lebwohl, M. J. Stephen, Phys. Rev., 163, 376 (1967).
4. A. L. Fetter, M. J. Stephen, Phys. Rev., 168, 475 (1968).
5. А. Е. Горбоносов, И. О. Кулик, ЖЭТФ, 60, 688 (1971).
6. B. Sutherland, Phys. Rev., A8, 2514 (1973).
7. Г. Ф. Жарков, А. Д. Заикин, ЖЭТФ, 77, 223 (1979).
8. Г. Ф. Жарков, А. Д. Заикин, ЖЭТФ, 78, 206 (1980).