Краткие сообщения по физике № 4 1980

ОБ ОПЕРАТОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ $j_\mu(x)\Psi(x)$ В МОДЕЛИ ТИРРИНГА

М. Я. Пальчик

УДК 530.145

В модели Тирринга вычислены константы перенормировок z_1 и z_2. Показано, что в произведение полей $j_\mu(x)\Psi(x)$ дает вклад поле Ψ_1 с размерностью $d_1 = 3/2 + \lambda(a - \bar{a})/4\pi$. Найдены функции Грина, включающие это поле.

В этой заметке мы продемонстрируем на примере модели Тирринга ($L_{int} = \lambda j_\mu \Psi^+ \gamma_\mu \Psi$) некоторые идеи развиваемого в работе /I/ подхода к построению конформно-инвариантной теории поля. Мы получим следующие результаты:

I) В рамках упомянутого подхода вычислим константы перенормировок $z_1(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)$ в главном порядке по ε, где ε – раздвижка аргументов полей, и покажем, что из равенства $z_1 = z_2$ вытекает зависимость размерности от константы связи.

2) Покажем, что операторное разложение произведения $j_\mu(x + \varepsilon)\Psi(x)$ содержит поле $\Psi_1(x)$ с размерностью $d_1 = d + 1$, где d – размерность фундаментального поля, и найдем функции Грина, включающие это поле.

I. Рассмотрим перенормированное уравнение для пропагатора фундаментального поля Ψ (в евклидовом пространстве)

$$iz_2\hat{\partial}_{x_1} G(x_{12}) = \delta(x_{12}) + z_1\lambda\gamma_\mu \langle 0|Tj_\mu(x_1)\Psi(x_1)\Psi^+(x_2)|0\rangle, \quad (I)$$

где

$$G(x_{12}) = \langle 0|T\Psi(x_1)\Psi^+(x_2)|0\rangle = (i/4\pi)\Gamma(d-1/2)\hat{\partial}_{x_1}(x_{12}^2/2)^{-d+1/2},$$

$$G_\mu(x_1x_2|x_3) = \langle 0|T\Psi(x_1)\Psi^+(x_2)j_\mu(x_3)|0\rangle =$$

$$= -(i/4\pi)\left[a\delta_{\mu\nu} + \bar{a}\gamma_5\epsilon_{\mu\nu}\right]\ln(x_{23}^2/x_{13}^2)G(x_{12}),$$

$j_\mu(x)$ – сохраняющийся ток: $\partial_\mu j_\mu = \epsilon_{\mu\nu}\partial_\mu j_\nu = 0$.

Так же, как и в /I/, представим произведение полей в совпадающих точках в правой части (I) как предел:

$$z_1\gamma_\mu j_\mu(x_1)\Psi(x_1) = \lim_{\varepsilon \to 0}\int d\Omega_\varepsilon z_1(\varepsilon) j_\mu(x+\varepsilon)\Psi(x), \qquad (2)$$

где $\int d\Omega_\varepsilon$ – усреднение по углам (евклидова) вектора ε_μ. Таким образом, необходимо найти разложение конформно-инвариантной функции Грина $\langle 0|T j_\mu(x_1+\varepsilon)\Psi(x_1)\Psi^+(x_2)|0\rangle$ по степеням вектора ε_μ. Учитывая только главные члены этого разложения, получим

$$\int d\Omega_\varepsilon \lambda\gamma_\mu G_\mu(x_1x_2|x_3)\Big|_{x_3=x_1+\varepsilon} \approx$$

$$\approx -(\lambda/4\pi)(a-\bar{a})\Gamma(d-1/2)(\varepsilon^2/2)^{-d+1/2}\delta(x_{12}) + (\lambda/4\pi)(a-\bar{a})$$
$$\times(d-1/2)i\hat{\partial}_{x_1}G(x_{12}). \qquad (3)$$

Чтобы получить первый член, надо взять фурье-образ функции $\lambda\gamma_\mu G_\mu$ по x_2 при $P = 0$. Это и есть коэффициент при δ-функции.

Запишем теперь уравнение (I) в виде

$$\lambda\gamma_\mu G_\mu(x_1x_2|x_1) = -z_1^{-1}(\varepsilon)\delta(x_{12}) + \frac{z_2(\varepsilon)}{z_1(\varepsilon)}\, i\hat{\partial}_{x_1}G(x_{12}). \qquad (4)$$

Из сравнения с (3) имеем

$$z_1(\varepsilon) = \frac{4\pi}{\lambda(a-\bar{a})}\,\frac{(\varepsilon^2/2)^{d-1/2}}{\Gamma(d-1/2)}, \quad \frac{z_2(\varepsilon)}{z_1(\varepsilon)} = \frac{\lambda(a-\bar{a})}{4\pi(d-1/2)}. \qquad (5)$$

Учитывая теперь, что имеет место равенство

$$z_1(\varepsilon) = z_2(\varepsilon),$$

мы находим из (5)

$$d = 1/2 + (\lambda/4\pi)(a-\bar{a}),$$

а для константы z_1 окончательно имеем

$$z_1(\varepsilon) = z_2(\varepsilon) = (\varepsilon^2/2)^{d-1/2}/\Gamma(d+1/2). \qquad (6)$$

В пределе $\lambda \to 0$, $d \to 1/2$ константа $z_1(\varepsilon) \to 1$, а пропагатор $G(x_{12})$ переходит в пропагатор свободного поля.

Аналогичные вычисления могут быть проделаны в конформно-инвариантной электродинамике. При этом из условия $z_1 = z_2$ мы получим зависимость размерности от констант, фиксирующих калибровку.

Отметим в заключение, что выражение (6) для констант $z_{1,2}(\varepsilon)$ справедливо лишь в главном порядке по ε. Вообще говоря, эти константы следует рассматривать как дифференциальные операторы: $z_{1,2}(\varepsilon) = z(\varepsilon^2, \varepsilon^2\Box)$. Их операторная природа проявляется, в частности, в том, что уравнение (4) с C-числовой константой z_1 справедливо только при $1/2 < d < 3/2$. Действительно: учтем в (5) следующие члены разложения. Тогда вместо первого члена возникнет сумма $- z_1^{-1}(\varepsilon)\left[1 + \alpha_1\varepsilon^2\Box + \ldots + \alpha_n(\varepsilon^2\Box)^n + \ldots\right]$, а вместо второго – $i\hat{\partial}_{x_1}\left[1 + \beta_1\varepsilon^2\Box + \ldots\right]G$, где α_i и β_i – известные константы. Если $3/2 < d < 5/2$, то член $\alpha_1 z_1^{-1}(\varepsilon^2)\varepsilon^2\Box$ сингулярен в пределе $\varepsilon^2 \to 0$ и должен быть учтен в уравнении (4). В общем случае, когда $1/2 + n < d < 3/2 + n$, вместо уравнения (6) получим:

$$i\hat{\partial}_{x_1} G(x_{12}) = z_{1,n}^{-1}(\varepsilon^2, \varepsilon^2\Box)\delta(x_{12}) + \lambda\gamma_\mu \langle 0|Tj_\mu(x_1)\Psi(x_1)\Psi^+(x_2)|0\rangle,$$

где $z_{1,n}^{-1}$ – дифференциальный оператор:

$$z_{1,n}^{-1}(\varepsilon^2, \varepsilon^2\Box) = \Gamma(d+1/2)(\varepsilon^2/2)^{-d+1/2}\left[1 + \alpha_1\varepsilon^2\Box + \ldots + \alpha_n(\varepsilon^2\Box)^n\right].$$

Для полной реализации описанного в /I/ подхода необходимо знать константы z_1 и z_2 во всех порядках по ε. Их вычисление является первоочередной задачей.

2. Чтобы найти поля, входящие в операторное разложение произведения $j_\mu(x + \varepsilon)\Psi(x)$, необходимо рассмотреть полюсы по l выражения /I,2/:

$$Q^c(l) = \int dz dz_1 dz_2 C_\mu^{ld\sigma_j}(x_1 z_1|z)G^{-1}(z_1 z_2)G_{1,\mu}(z_2 x_2 \ldots y_n|z), \quad (7)$$

где
$$G_{1,\mu}(z_2 x_2 \ldots y_n|z) =$$
$$= \langle 0|T\Psi(z_2)\Psi(x_2)\ldots\Psi(x_n)\Psi^+(y_1)\ldots\Psi^+(y_n)j_\mu(z)|0\rangle, \quad (8)$$

а $C_\mu^{ld\sigma_j}$ – конформно-инвариантная 3-точечная функция. Каждому полюсу функции $Q(l)$ соответствует поле, дающее вклад в разложение $j_\mu(x_1)\Psi(x_2)$. В частности, полюсу в точке $l = d + 1$ соответствует поле с размерностью

$$d_1 = d + 1 = 3/2 + (\lambda/4\pi)(a - \bar{a}).$$

Этот полюс, однако, имеется лишь при определенном выборе функции C_μ. Действительно, поле Ψ_1 не должно давать вклад в произведение $\gamma_\mu j_\mu(x)\Psi(x)$, так как это противоречит уравнению движения. В /I,3/ показано, что условие отсутствия полюса, соответствующего этому вкладу, может быть представлено в виде уравнения

$$\operatorname*{res}_{l=d+1} Q^C(l) = 0, \tag{9}$$

где в качестве функции C_μ, входящей в (7), выбрана функция

$$C^{ld\sigma_j}_{1,\mu}(x_1 x_2 | x_3) = (\delta_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu\nu}\gamma_5)(x_{12}^2/2)^{-(l+d)/2} \times$$

$$\times\, \partial_\nu^{x_3} \left| \hat{x}_{13}(x_{13}^2/2)^{-(l-d)/2}\, \hat{x}_{32}(x_{23}^2/2)^{-(d-l)/2} \right|, \quad \hat{x} = x_\mu \gamma_\nu / \sqrt{x^2}. \tag{10}$$

Вычисляя функцию Q^{C_1} в (9), мы получим, как показано в /3/ (и в /I/ при $n = 2$), следующее уравнение:

$$- \hat{\partial}_{x_1} G_n(x_1 \ldots y_n) = (\lambda/4\pi) \Big| a\hat{\partial}_{x_1} \Big[\sum_{i=1}^{n} \ln(x_1 - y_i)^2 - \sum_{i=2}^{n} \ln(x_1 - x_i)^2 \Big] -$$

$$- \bar{a}\gamma_\mu \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu^{x_1} \Big[\sum_{i=2}^{n} \gamma_5^{x_i} \ln(x_1 - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_5^{y_i} \ln(x_1 - y_i)^2 \Big] \Big| G(x_1 \ldots y_n), \tag{11}$$

где

$$G(x_1 \ldots y_n) = \langle 0 | T\Psi(x_1) \ldots \Psi(x_n) \Psi^+(y_1) \ldots \Psi^+(y_n) | 0 \rangle_{con}. \tag{11a}$$

При вычислениях использованы тождества Уорда для функции Грина (8), см. /4/. Уравнение (11) однозначно определяет функцию Грина (11a).

Выберем теперь в качестве C_μ в (7) следующую функцию

$$C^{ld\sigma_j}_{2,\mu}(x_1 x_2 | x_3) = (\delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}\gamma_5)(x_{12}^2/2)^{-(l+d)/2} \times$$

$$\times\, \partial_\nu^{x_3} \left| \hat{x}_{13}(x_{13}^2/2)^{-(l-d)/2}\, \hat{x}_{32}(x_{23}^2/2)^{-(d-l)/2} \right|, \tag{12}$$

Функции $C_{1,\mu}$ и $C_{2,\mu}$ ортогональны /I,3/, и $C_{2,\mu}$ удовлетворяет соотношению

$$\gamma_\mu C^{ld\sigma_j}_{2,\mu}(x_1 x_2 | x_3) = 0. \tag{13}$$

Можно показать, что вычет функции $Q^{C_2}(l)$ в полюсе $l = d + 1$ отличен от нуля. Согласно /I,2/, вычет в полюсе определяет функцию Грина, включающую соответствующее поле. В данном случае имеем

$$G_1(x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n) \backsim \operatorname*{res}_{l=d+1} Q^{C_2}(l),$$

где

$$G_1(x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n) =$$

$$= \langle 0 | T \Psi_1(x_1)\Psi(x_2)\ldots\Psi(x_n)\Psi^+(y_1)\ldots\Psi^+(y_n)|0\rangle_{con}. \qquad (I4)$$

Заметим, что вследствие соотношения (I3) поле Ψ_1 дает вклад в разложение $j_\mu(x_1)\Psi(x_2)$, но не $\gamma_\mu j_\mu(x_1)\Psi(x_2)$, так что наличие поля Ψ_1 не противоречит уравнению движения. Вычисляя интеграл (7) с функцией C_μ, определенной в (I2), и используя уравнения (II), находим

$$G_1(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n) \sim 4\sqrt{2}\pi a\bar{a}(a - \bar{a})^{-1}(d-1/2)\Big\{\hat{\partial}_{x_1}\Big[\sum_{i=2}^{n}\ln(x_1-x_i)^2 -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\ln(x_1-y_i)^2\Big] + \epsilon_{\mu\nu}\gamma_\mu\partial_\nu^{x_1}\Big[\sum_{i=2}^{n}\ln(x_1-x_i)^2\gamma_5^{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\ln(x_1-y_i)^2\gamma_5^{y_i}\Big]\Big\} G(x_1 \ldots y_n), \qquad (I5)$$

где $G_n(x_1 \ldots y_n)$ - функции Грина (IIa). Интеграл (7) вычисляется тем же методом, который использован в /I,3/.

Приведем, в заключение, выражение для функции Грина с током:

$$G_{1,\mu}(x_1x_2|x_3) = \langle 0|T j_\mu(x_3)\Psi(x_1)\Psi_1^+(x_2)|0\rangle =$$

$$= g_j(\delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}\gamma_5)\partial_\nu^{x_3}\Big\{\hat{\partial}_{x_3}\ln x_{13}^2\gamma_\rho(x_{32})_\rho\Big\}(x_{12}^2/2)^{-d-1/2}.$$

Оно получается из функции (I2) взятием предела $l = d + 1$. Тождества Уорда для этой функции содержат швингеровские члены и имеют вид:

$$\partial_\mu^{x_3}G_{1,\mu}(x_1x_2|x_3) = \sqrt{2}g_j\hat{\partial}_{x_3}\delta(x_{13})\hat{x}_{12}(x_{12}^2/2)^{-d},$$

$$\epsilon_{\mu\nu}\partial_\mu^{x_3}G_{1,\nu}(x_1x_2|x_3) = \sqrt{2}g_j\hat{\partial}_{x_3}\delta(x_{13})\hat{x}_{12}(x_{12}^2/2)^{-d}.$$

В общем случае подобные тождества Уорда рассмотрены в /5/, см.

также /I/, где обсуждается возможность существования в теории тензорных полей, связанных с током. Модель Тирринга является простейшим примером, где такие поля существуют (поле ψ_1).

Можно показать, что константа g_j и коэффициент пропорциональности в (I5) отличны от нуля (это необходимо для существования поля ψ_1). Их вычисление будет приведено в другой работе.

Автор благодарит Е. С. Фрадкина за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
21 января 1980 г.

Литература

1. E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik, Phys. Reports 44, 249 (1978).
2. I. T. Todorov, M. C. Mintchev, V. B. Petkova, Conformal Invariance in Quantum Field Theory, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1978.
3. М. Я. Пальчик, Труды Ш школы по физике высоких энергий, Приморско, Болгария, 1977 г., изд. София, 1978 г.
4. K. Johnson, Nuovo Cim., 20, 773 (1961).
5. E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik, Nuovo Cim., 34A, 438 (1976).