УДК 621.315.592; 537.311.322

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ СО СЛОЖНОЙ ЗОННОЙ СТРУКТУРОЙ

В. А. Чуенков

Построена теория нелинейного преобразования частоты электромагнитного излучения в объемных однородных полупроводниках со сложной зонной структурой (Ge, Si, полупроводники $A_{III}B_V$). Показано, что в области высоких частот $\omega >> \tau_p^{-1}$ (τ_p – время релаксации импульса электронов) узкозонные полупроводники с непараболической зависимостью энергии электронов от импульса являются наиболее эффективными преобразователями электромагнитного излучения. Вычислены мощность вторичного излучения $W_{3\omega}^l$ (l – толщина полупроводниковой пластинки, $\omega = 4.37 \cdot 10^{11}\ c^{-1}$ – частота падающего на полупроводник излучения) и коэффициенты преобразования по току $K(3\omega, \omega)$ и по мощности $K_W^{3\omega}$ на тройной частоте в $InSb$ при температуре $T_0 = 77\,K$. Теоретические значения $W_{3\omega}^l$, $K(3\omega,\omega)$, $K_W^{3\omega}$ хорошо согласуются с экспериментальными данными [2].

Нелинейные электромагнитные эффекты в системе свободных носителей тока в однородных полупроводниках обусловлены зависимостью частоты соударений, концентрации, эффективной массы носителей тока от электрического поля. Последний из этих механизмов имеет место в полупроводниках с непараболической зависимостью энергии носителей зарядов (в дальнейшем для определенности будем говорить об электронах) от импульса. Решение вопроса о доминирующей роли того или иного механизма преобразования частоты электромагнитного излучения не является очевидным. В общем случае этот вопрос требует специального рассмотрения.

В работе [1] построена теория электропроводности анизотропных многодолинных полупроводников в произвольно зависящем от времени электрическом поле, в частности, получены формулы (64) – (66), позволяющие при достаточно общих предположениях о законе дисперсии и механизмах рассеяния электронов вычислить как составляющие плотности электрического тока, меняющиеся с частотами падающих на полупроводник электромагнитных волн, так и составляющие плотности электрического тока, меняющиеся с частотами, равными комбинации любых трех частот (или любых двух частот при наличии постоянного электрического поля), присутствующих в спектре действующего на полупроводник электромагнитного излучения, т.е. решить задачу о преобразовании частоты электромагнитного излучения. Эффективность преобразования частоты электромагнитного излучения будем характеризовать коэффициентом преобразования по току

$$K(\bar{\omega}, \omega_n) = \frac{j_0(\bar{\omega})}{j_0(\omega_n)}, \tag{1}$$

представляющим собой отношение амплитуды стороннего тока $j_0(\bar{\omega})$ на комбинированной частоте $\bar{\omega}$ к амплитуде тока $j_0(\omega_n)$ на частоте сигнала ω_n. Вид этого отношения определяется законом дисперсии электронов, степенью вырождения электронного газа, соотношением между $\bar{\omega}$ и ω_n, временами релаксации энергии τ_ε и импульса τ_p электронов. Зависимость действующего на полупроводник переменного электрического поля $\mathbf{E}(t)$ может быть различной. Мы ограничимся важным для приложений случаем, когда

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_1 \cos\omega_1 t + \mathbf{E}_2 \cos\omega_2 t + \mathbf{E}_3 \cos\omega_3 t. \tag{2}$$

Одно из слагаемых в (2) может представлять собой постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0$ (например, $\omega_3 = 0$, $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_0$). Используя полученные в [1] общие результаты, рассмотрим ряд предельных случаев.

Полупроводники с непараболической зависимостью энергии электронов от импульса (халькогениды свинца, полупроводники $A_{III}B_V$). Высокие частоты. Экстремумы четырех L-долин зоны проводимости халькогенидов свинца находятся в точках, расположенных на краю зоны Бриллюэна в направлениях [111]. Такова же структура валентной зоны халькогенидов свинца. В каждой из долин

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta \cdot \left(1 + \frac{p_\perp^2}{m_\perp \Delta} + \frac{p_\parallel^2}{m_\parallel \Delta}\right)^{1/2}, \tag{3}$$

где $p_\perp$ и $p_\|$ – поперечный и продольный импульсы, а $m_\perp$ и $m_\|$ – поперечная и продольная массы электронов; Δ – полуширина запрещенной зоны. Поверхности постоянной энергии, как следует из (3), являются эллипсоидами вращения с осями симметрии, направленными вдоль [111].

Здесь и ниже будем предполагать, что изотропные части функций распределения одинаковы во всех долинах. Это имеет место либо в произвольно ориентированных слабых электрических полях, либо в ориентированных в определенном направлении сильных электрических полях, когда условия разогревания электронного газа одинаковы во всех долинах. Последнее условие в халькогенидах свинца выполняется при $\mathbf{E}_1\|\mathbf{E}_2\|\mathbf{E}_3\|[100]$; оно обеспечивает максимальное значение коэффициента преобразования ($\mathbf{E}_k$ параллельны друг другу) и одинаковые условия разогревания электронного газа во всех долинах ($\mathbf{E}_k\|[100]$). Будем предполагать также, что выполняются неравенства: $\omega_k\tau_p >> 1$ (высокочастотные поля), $\varepsilon^2 - \Delta^2 << \Delta^2$ (слабая непараболичность закона дисперсии). При указанных выше предположениях коэффициент преобразования

$$K(\bar{\omega},\omega_n) = \frac{e^2}{\Delta}\left(\frac{2}{m_\perp}+\frac{1}{m_\|}\right)\cdot Z_0(E_k,\omega_k), \tag{4}$$

$$Z_0(E_k,\omega_k) = \begin{cases} \dfrac{E_n^2}{6\omega_n^2}, & \bar{\omega} = 3\omega_n \qquad (n=1,2,3); \\ \dfrac{E_s^2E_l\omega_n}{2\omega_s^2\omega_lE_n}, & \bar{\omega} = 2\omega_s \pm \omega_l \qquad (n,s,l=1,2,3;\ s\neq l); \\ \dfrac{E_sE_l}{\omega_s\omega_l}, & \bar{\omega} = \omega_s \pm \omega_l \pm \omega_n \quad (s,l,n=1,2,3;\ n\neq s, n\neq l, s\neq l). \end{cases} \tag{5}$$

Анизотропия $K(\bar{\omega},\omega_n)$ сравнительно мала. В оптимальном случае, когда $m_\|/m_\perp \to \infty$, в (4) появится численный множитель 5/4 при $\mathbf{E}_k\|[110]$ и множитель 4/3 при $\mathbf{E}_k\|[111]$.

При $m_\| = m_\perp = m$ из (4) и (5) получим коэффициент преобразования для полупроводников $A_{III}B_V$, в Г-долине которых электроны обладают непараболическим изотропным законом дисперсии. В частности, при $\bar{\omega} = 3\omega_n$ (утроение частоты) коэффициент преобразования равен в этом случае [см. (4), (5)]

$$K(3\omega_n,\omega_n) = \frac{e^2E_n^2}{2m\Delta\omega_n^2}. \tag{6}$$

При $\omega \gtrsim \nu$ (ν – частота столкновений электронов) для среднего по времени отношения токов на этих же частотах (экспериментально наблюдаемая величина) вместо (6) получим

$$\overline{K}(3\omega_n,\omega_n) = K(3\omega_n,\omega_n)\cdot\overline{\cos^2\omega_n t} = \frac{e^2E_n^2}{4m\Delta(\omega_n^2+\nu^2)}. \tag{7}$$

Для образцов $InSb$ n-типа [$m = 0.013m_0$, $2\Delta = 0.18\,эВ$, $\nu = 3\cdot 10^{11}\,c^{-1}$ при $T_0 = 77\,K$ (рассеяние на полярных оптических фононах), $\omega_n = 4.37\cdot 10^{11}\,c^{-1}$, $E_n = 300\,В/см$] формула (7) дает $\bar{K}(3\omega_n,\omega_n) = 0.12$. Эксперимент при тех значениях перечисленных выше величин и толщине пластинки $l = 0.07\,мм$ дает $\bar{K}(3\omega_n,\omega_n) = 0.10$ [2]. Следовательно, в этом конкретном случае теория согласуется с экспериментом. В случае, когда $\bar{\omega}$ представляет собой комбинацию трех различных частот [см. (4), (5)], $K(\bar{\omega},\omega_n) \approx 0.1 - 0.2$ при $E_k \approx 300\,В/см$, $\omega_k \approx 10^{12}\,c^{-1}$.

Полупроводники с параболической зависимостью энергии электронов от импульса. Высокие частоты. В случае, когда (германий, кремний)

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p_\perp^2}{2m_\perp} + \frac{p_\parallel^2}{2m_\parallel}, \tag{8}$$

нелинейные электромагнитные эффекты в электронном газе в полупроводниках обусловлены зависимостью частоты столкновений электронов от энергии и, следовательно, от электрического поля. Если поперечная и продольная компоненты тензора частоты столкновений

$$\nu_\perp(\varepsilon), \nu_\parallel(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-r} \tag{9}$$

(такая зависимость имеет место практически для всех известных нам механизмов рассеяния электронов), то коэффициент преобразования определяется выражением

$$K(\bar{\omega},\omega_n) = e^2|r(3-2r)|\cdot\left(\frac{2\nu_\perp(T_0)}{3m_\perp} + \frac{\nu_\parallel(T_0)}{3m_\parallel}\right)\cdot L^*\cdot Z_0(E_k,\omega_k), \tag{10}$$

где в данном случае

$$L^* = \left\{\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\left(\frac{\varepsilon}{T_0}\right)^{-r}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\right\}\cdot\left\{\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\right\}^{-1}, \tag{11}$$

$f_0(\varepsilon)$ – изотропная часть функции распределения электронов, T_0 – температура решетки,

$$Z_0(E_k,\omega_k)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}\dfrac{E_n^2}{\omega_n^3}, & \bar{\omega}=3\omega_n\ (n=1,2,3);\\ \dfrac{3}{10}\dfrac{E_s^2E_l\omega_n}{\omega_s^2\omega_lE_n|2\omega_s\pm\omega_l|}, & \\ \quad\bar{\omega}=2\omega_s\pm\omega_l & (n,s,l=1,2,3;s\neq l);\\ \dfrac{3}{5}\dfrac{E_sE_l}{\omega_s\omega_l|\omega_s\pm\omega_l\pm\omega_n|}, & \\ \quad\bar{\omega}=\omega_s\pm\omega_l\pm\omega_n & (s,l,n=1,2,3;n\neq s,n\neq l,s\neq l).\end{cases} \tag{12}$$

При выводе (10) использованы формулы (64) – (66) из [1]. Величина L^* зависит от степени вырождения электронного газа; механизма рассеяния, определяющего частоту столкновений электронов; вида функции распределения электронов $f_0(\varepsilon)$. При $r=-\frac{1}{2}$ (электроны рассеиваются на акустических фононах) в случае вырожденного электронного газа

$$K(3\omega_n,\omega_n)=\frac{e^2}{15\mu_0}\left(\frac{2}{3}\frac{\nu_\perp(\mu_0)}{m_\perp}+\frac{\nu_{||}(\mu_0)}{3m_{||}}\right)\cdot\frac{E_n^2}{\omega_n^3}, \tag{13}$$

где μ_0 – энергия Ферми.

Для невырожденного электронного газа в сильном электрическом поле, когда $\bar{\varepsilon}>>T_0$,

$$K(3\omega_n,\omega_n)=\frac{4}{45\sqrt{\pi}}\frac{e^2}{T_0}\left(\frac{2}{3}\frac{\nu_\perp(T_0)}{m_\perp}+\frac{\nu_{||}(T_0)}{3m_{||}}\right)\cdot\sqrt{\frac{T_0}{T_e}}\cdot\frac{E_n^2}{\omega_n^3}, \tag{14}$$

где электронная температура

$$T_e=T_0+\frac{1}{3}e^2\tau_0(T_0)\cdot\left(\frac{2}{3}\frac{\nu_\perp(T_0)}{m_\perp}+\frac{\nu_{||}(T_0)}{3m_{||}}\right)\cdot\sum_{k=1}^{3}\frac{E_k^2}{\omega_k^2}, \tag{15}$$

а $\tau_0(T_0)$ есть время релаксации энергии электронов [см. формулу (216) в [3]]. Отношение коэффициента преобразования (14) (германий; параболический закон дисперсии) к коэффициенту преобразования (6) (антимонид индия; непараболический закон дисперсии) равно

$$\mathcal{D}=\frac{16}{135\sqrt{\pi}}\frac{m}{m_\perp}\frac{\Delta}{T_0}\sqrt{\frac{T_0}{T_e}}\cdot(\omega_n\tau_\perp)^{-1}\approx10^{-1}\cdot(\omega_n\tau_\perp)^{-1} \tag{16}$$

при $m=0.013m_0$, $m_\perp=0.082m_0$, $\Delta=0.09\ эВ$, $T_0=77\,K$, $T_e=4T_0$. При рассеянии электронов на нейтральных ($r=0$) или заряженных ($r\approx3/2$) примесных центрах $\mathcal{D}\to0$.

Следовательно, узкозонные полупроводники с непараболическим законом дисперсии для электронов ($InSb$, $HgTe$ и другие) при $\omega_n \tau_p >> 1$ (высокие частоты) являются более эффективными преобразователями частоты электромагнитного излучения, чем полупроводники с параболическим законом дисперсии для электронов. Этот вывод остается в силе и в том случае, когда $\bar{\omega}$ представляет собой комбинацию двух или трех различных частот. Соответствующие выражения для коэффициента преобразования в этом случае легко получить с помощью формул (4), (5), (10), (12).

На основании работы [1] можно показать, что в области промежуточных частот, когда $\tau_\varepsilon^{-1} << \omega << \tau_p^{-1}$, непараболичность закона дисперсии и зависимость частоты столкновений электронов от энергии оказывают одинаковое, по порядку величины, влияние на коэффициент преобразования $K(\bar{\omega}, \omega_n)$. В этом случае в германии при $T_0 = 30\,K$, $\omega_n \approx 10^{10}\ c^{-1}$, $E_n = 36\,B/см$ коэффициент преобразования $K(3\omega_n, \omega_n) \approx 0.4$.

Пусть на полупроводник действует электрическое поле

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \cos\omega_1 t + \mathbf{E}_2 \cos\omega_2 t. \tag{17}$$

Предположим, что

$$E_0, E_1 >> E_2, \omega_k \tau >> 1, |\omega_1 - \omega_2| << \omega_k, |\omega_1 - \omega_2|\tau_\varepsilon << 1. \tag{18}$$

Условия (18) могут быть реализованы в следующем эксперименте. Сильная электромагнитная волна с частотой ω_1 и амплитудой E_1 направляется на движущийся с большой скоростью объект. Отраженная от объекта волна возвращается к месту ее регистрации с частотой ω_2 (частота незначительно меняется вследствие эффекта Допплера, так что $|\omega_1 - \omega_2|/\omega_2 \lesssim 10^{-5}$) и с сильно уменьшенной амплитудой $E_2 << E_1, E_0$. На приемное устройство будут действовать сильная электромагнитная волна с амплитудой E_1, отраженная волна с амплитудой E_2 и постоянное электрическое поле E_0. Уравнение движения частицы с зарядом e в поле (17) имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}_0 + e\mathbf{E}_1 \cos\omega_1 t + e\mathbf{E}_2 \cos\omega_2 t - \frac{\mathbf{p}}{\tau_p}. \tag{19}$$

При $\mathbf{E}_1 \| \mathbf{E}_2 \| \mathbf{E}_0$ оно имеет решение

$$p(t) = eE_0\tau_p + \frac{e\tau_p E_1}{1+\omega_1^2\tau_p^2}(\cos\omega_1 t + \omega_1\tau_p \sin\omega_1 t) +$$

$$+\frac{e\tau_p E_2}{1+\omega_2^2\tau_p^2}(\cos\omega_2 t+\omega_2\tau_p\sin\omega_2 t). \qquad (20)$$

При [см. (3)]

$$\varepsilon(p)=\Delta\left(1+\frac{p^2}{m\Delta}\right)^{1/2} \qquad (21)$$

ток (непараболичность считаем слабой)

$$j(t)=\frac{eN_0}{m}\cdot\left\{p(t)-\frac{p^3(t)}{2m\Delta}\right\}, \qquad (22)$$

где N_0 – концентрация электронов. Подставляя (20) в (22) и усредняя полученное выражение для тока по промежутку времени $1/\omega << \Delta t << 1/|\omega_1-\omega_2|$, получим $(\omega_1\approx\omega_2=\omega)$

$$\mathrm{j}(t)=\frac{e^2\tau_p N_0}{m}E_0-\frac{eN_0}{2m^2\Delta}\cdot\left\{A_0^3+\frac{3}{2}(1+\omega^2\tau_p^2)A_0\cdot(A_1^2+A_2^2)+\right.$$

$$\left.+\,3A_0A_1A_2\cdot[(1+\omega^2\tau_p^2)\cos(\omega_1-\omega_2)t+(\omega_1-\omega_2)\tau_p\cdot\sin(\omega_1-\omega_2)t]\right\}; \qquad (23)$$

$$A_0=e\tau_p E_0,\ A_1=\frac{e\tau_p E_1}{1+\omega^2\tau_p^2},\ A_2=\frac{e\tau_p E_2}{1+\omega^2\tau_p^2}.$$

Как следует из (23), амплитуды тока на частоте $\omega_1-\omega_2$ и на частоте отраженной волны определяются соответственно выражениями

$$j_0(\omega_1-\omega_2)=\frac{3}{2}\frac{e^4\tau_p^3 N_0E_0E_1E_2}{m^2\Delta(1+\omega^2\tau_p^2)}, \qquad (24)$$

$$j_0(\omega_2)=\frac{3}{4}\frac{e^4\tau_p^3 N_0E_0E_2^2}{m^2\Delta(1+\omega^2\tau_p^2)}. \qquad (25)$$

Измеряя ток на частоте $\omega_1-\omega_2$ и разность частот $\Delta\omega=\omega_1-\omega_2$, можно определить абсолютную величину и направление скорости объекта, а по времени прихода отраженной волны и расстояние до него. Можно, конечно, получить те же сведения путем измерения тока на частоте отраженной волны. Но этот ток, как показывает отношение

$$\frac{j_0(\omega_2)}{j_0(\omega_1-\omega_2)}=\frac{E_2}{2E_1}\approx 10^{-8},$$

на восемь порядков меньше тока на разностной частоте $\omega_1 - \omega_2$.

Вычисление амплитуд вторичных волн. Коэффициент преобразования электромагнитного излучения по мощности. Предположим, что электрические поля

$$\mathbf{E}_n^*(z,t) = \mathbf{E}_n^0 \exp[i(\omega_n t - k_n z)],\ k_n = \frac{\omega_n}{c}\,(n = 1,2,3),$$

составляющие нормально падающий на полупроводник вдоль оси z электромагнитный сигнал, параллельны друг другу. Под действием этих полей в полупроводнике, обладающем нелинейными свойствами, возникают, как сказано выше и показано в [1], вторичные токи на комбинированных частотах

$$\mathbf{j}^e_{\bar\omega}(z,t) = \sigma(\bar\omega)\mathbf{E}_{\bar\omega}(z,t) + \mathbf{j}_{\bar\omega}(z,t), \tag{26}$$

где первое слагаемое в правой части есть линейная по полю часть тока проводимости свободных зарядов на комбинированной частоте $\bar\omega = \omega_n \pm \omega_s \pm \omega_l$ $(n,s,l = 1,2,3)$;

$$\mathbf{E}_{\bar\omega}(z,t) = \mathbf{E}_{\bar\omega}(z)e^{i\bar\omega t} \tag{27}$$

– электрическое поле вторичной волны;

$$\mathbf{j}_{\bar\omega}(z,t) = \mathbf{j}_{\bar\omega}\exp[i(\bar\omega t - \bar k z)] \tag{28}$$

– нелинейная по полю часть тока проводимости свободных зарядов на частоте $\bar\omega$,

$$\bar k = \bar k_n \pm \bar k_s \pm \bar k_l,\ \bar k_n = \frac{\omega_n}{c}\sqrt{\chi(\omega_n)},\ j_{\bar\omega} \sim E_n \cdot E_s \cdot E_l, \tag{29}$$

$\chi(\omega_n)$ – диэлектрическая постоянная полупроводника на частоте ω_n, E_n – амплитуды электрических полей на частотах ω_n в полупроводнике (в отличие от амплитуд E_n^0 в пустоте).

Амплитуда $\mathbf{E}_{\bar\omega}(z)$ вторичной волны, распространяющейся вдоль оси z, может быть найдена из уравнения

$$\frac{d^2\mathbf{E}_{\bar\omega}(z)}{dz^2} + \chi(\bar\omega)\frac{\bar\omega^2}{c^2}\mathbf{E}_{\bar\omega}(z) = \frac{4\pi i\bar\omega}{c^2}\mathbf{j}_{\bar\omega}\cdot e^{-i\bar k z}, \tag{30}$$

где

$$\chi(\bar\omega) = \chi_0(\bar\omega) - \frac{4\pi i}{\bar\omega}[Re\sigma(\bar\omega) - iIm\sigma(\bar\omega)] \tag{31}$$

– полная диэлектрическая постоянная, в которой учтена линейная по полю часть тока проводимости свободных зарядов; $Re\sigma(\bar{\omega})$ и $Im\sigma(\bar{\omega})$ – соответственно действительная и мнимая части электропроводности системы свободных зарядов; $\chi_0(\bar{\omega})$ – диэлектрическая постоянная системы связанных зарядов. Заметим, что в рассматриваемом нами случае (все электрические поля параллельны друг другу) ток $\mathbf{j}_{\bar{\omega}}(z,t)$ является чисто поперечным. Уравнение (30) является линейным, поскольку поле $\mathbf{E}_{\bar{\omega}}(z)$, как показывают оценки, является достаточно слабым, т.е. не влияет на величину $\sigma(\bar{\omega})$ и $\chi(\bar{\omega})$. Правая часть уравнения (30) является, как сказано выше и показано в [1], известной функцией полей E_n внутри полупроводника.

Поля $\mathbf{E}_n(z)$ могут быть найдены из уравнения

$$\frac{d^2\mathbf{E}_n(z)}{dz^2} + \chi(\omega_n)\frac{\omega_n^2}{c^2}\cdot\mathbf{E}_n(z) = 0. \tag{32}$$

Если поля E_n достаточно велики (оказывают влияние на величину электропроводности $\sigma(\omega_n)$ и на величину $\chi(\omega_n)$), то они должны определяться, строго говоря, путем решения самосогласованной задачи [сильные электрические поля изменяют $\sigma(\omega_n)$, которая, в свою очередь, через $\chi(\omega_n)$ влияет на величину полей E_n в полупроводнике (см. (31))]. Мы ограничимся рассмотрением случаев, когда $\chi(\omega_n)$ в (32) слабо изменяется по сравнению с изменением $\mathbf{E}_n(z)$. Заметим также, что для подавляющего числа полупроводников χ_0 практически не зависит от частоты вплоть до $\bar{\omega} \approx 10^{13}\,c^{-1}$.

Рассмотрим пример, имеющий непосредственное отношение к эксперименту [2]. Будем предполагать, что полупроводник представляет собой пластинку толщиной l. Предположим также, что электромагнитный сигнал падает нормально к поверхности пластинки, а составляющие его поля параллельны друг другу. При этих предположениях решение уравнения (30) может быть представлено в виде:

$$\mathbf{E}_{\bar{\omega}}(z) = \mathbf{E}^0_{\bar{\omega}} e^{ik^0_{\bar{\omega}}z}\ (z<0),$$

$$\mathbf{E}_{\bar{\omega}}(z) = \mathbf{E}'_{\bar{\omega}} e^{-ik_{\bar{\omega}}z} + \mathbf{E}''_{\bar{\omega}} e^{ik_{\bar{\omega}}z} + \mathbf{E}^-_{\bar{\omega}} e^{-i\bar{k}z} + \mathbf{E}^+_{\bar{\omega}} e^{i\bar{k}z}\ (0<z<l), \tag{33}$$

$$\mathbf{E}_{\bar{\omega}}(z) = \mathbf{E}^l_{\bar{\omega}} e^{-ik^0_{\bar{\omega}}z}\ (z>l),$$

где

$$E^{\pm}_{\bar{\omega}} = \frac{4\pi i\bar{\omega}}{c^2(k_{\bar{\omega}}+\bar{k})(k_{\bar{\omega}}-\bar{k})} j^{\pm}_{\bar{\omega}}, \tag{34}$$

$$j_{\bar{\omega}}^{\pm} = \frac{e^4 N_0 E_{\omega_1}^{\pm} \cdot E_{\omega_2}^{\pm} \cdot E_{\omega_3}^{\pm}}{2m^2 \Delta(\omega^2 + \nu^2)^{3/2}}. \tag{35}$$

Формула (35) получена для закона дисперсии (21) с помощью формул работы [1].

Поля $E_{\omega_n}^{\pm}$ находятся из решения уравнения (32):

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}_\omega(z) = \mathbf{E}_\omega^0 e^{-ik_\omega^0 z} + \mathbf{E}'_\omega e^{ik_\omega^0 z} \ (z < 0), \\
\mathbf{E}_\omega(z) = \mathbf{E}_\omega^- e^{-ik_\omega z} + \mathbf{E}_\omega^+ e^{ik_\omega z} \ (0 < z < l), \\
\mathbf{E}_\omega(z) = \mathbf{E}_\omega^l e^{-ik_\omega^0 z} \ (z > l).
\end{gathered} \tag{36}$$

Под ω в (36) подразумевается любая из частот ω_n.

Сшивая функции (33) и их первые производные при $z = 0$ и $z = l$, мы выразим амплитуду прошедшей через пластинку волны $E_{\bar{\omega}}^l$ на комбинированной частоте $\bar{\omega}$ через амплитуды $E_{\bar{\omega}}^+$, $E_{\bar{\omega}}^-$ и волновые векторы $k_{\bar{\omega}}$, $k_{\bar{\omega}}^0$, $\bar{k}$:

$$\begin{gathered}
E_{\bar{\omega}}^l = \mathcal{D}^{-1} e^{ik_{\bar{\omega}}^0 l} \cdot \left\{ E_{\bar{\omega}}^- \cdot \left[2\frac{k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0} \left(1 + \frac{\bar{k}}{k_{\bar{\omega}}^0}\right) + \right.\right. \\
+ \left(1 - \frac{k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0}\right) \frac{\bar{k} - k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0} e^{-i(\bar{k} + k_{\bar{\omega}})l} - \\
\left. - \left(1 + \frac{k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0}\right) \frac{\bar{k} + k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0} e^{-i(\bar{k} - k_{\bar{\omega}})l} \right] + \\
+ E_{\bar{\omega}}^+ \cdot \left[2\frac{k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0} \left(1 - \frac{\bar{k}}{k_{\bar{\omega}}^0}\right) + \left(1 + \frac{k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0}\right) \frac{\bar{k} - k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0} e^{i(\bar{k} + k_{\bar{\omega}})l} - \right. \\
\left.\left. - \left(1 - \frac{k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0}\right) \frac{\bar{k} + k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0} e^{i(\bar{k} - k_{\bar{\omega}})l} \right] \right\}, \\
\mathcal{D} = \left(1 - \frac{k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0}\right)^2 e^{-ik_{\bar{\omega}} l} - \left(1 + \frac{k_{\bar{\omega}}}{k_{\bar{\omega}}^0}\right)^2 e^{ik_{\bar{\omega}} l}.
\end{gathered} \tag{37}$$

Сшивая, в свою очередь, функции (36) и их первые производные при $z = 0$ и $z = l$, мы выразим амплитуды $E_{\bar{\omega}}^+$, $E_{\bar{\omega}}^-$ и, следовательно, амплитуду $E_{\bar{\omega}}^l$ через амплитуды падающих на полупроводник электромагнитных волн E_ω^0 и волновые векторы k_ω, k_ω^0. После этого задачу можно считать решенной.

В качестве примера снова рассмотрим пластинку $InSb$ толщиной $l = 7 \cdot 10^{-3}$ *см*, на поверхность которой падает электромагнитная волна с частотой $\omega = 4.37 \cdot 10^{11}\, c^{-1}$. Физические параметры образца: $m = 0.013m_0$, $2\Delta = 0.18\,\text{эВ}$, $\chi_0 = 17$, $N_0 = 8.7 \cdot 10^{13}\,\text{см}^{-3}$, частота столкновений электронов в отсутствие электрического поля при $T_0 = 77\,K$ равна $\nu = 1.65 \cdot 10^{11}\, c^{-1}$. Вычислим амплитуду вторичной волны с частотой $\bar{\omega} = 3\omega = 1.31 \cdot 10^{12}\, c^{-1}$. Будем предполагать при этом, что частота столкновений электронов ν и плазменная частота ω_p связаны с действительными и мнимыми частями волновых векторов электромагнитных волн соотношениями, характерными для однородного полупроводника [см. (29), (31)]:

$$k^0_{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega}}{c}, k_{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega}}{c}\sqrt{\chi(\bar{\omega})} = \frac{\bar{\omega}}{c}[n'(\bar{\omega}) - i \cdot n''(\bar{\omega})], \tag{38}$$

$n'(\bar{\omega})$ и $n''(\bar{\omega})$ – соответственно действительная и мнимая части показателя преломления, определяемые выражениями

$$n'^2(\bar{\omega}) - n''^2(\bar{\omega}) = \chi_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\nu^2 + \bar{\omega}^2}\right),$$

$$n'(\bar{\omega}) \cdot n''(\bar{\omega}) = \frac{1}{2}\chi_0 \frac{\nu}{\bar{\omega}} \frac{\omega_p^2}{\nu^2 + \bar{\omega}^2}, \tag{39}$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m^* \chi_0},$$

где m^* – зависящая от средней энергии и, следовательно, от электрического поля эффективная масса электронов (в отличие от эффективной массы m у дна зоны проводимости).

Проделав с помощью перечисленных выше формул сравнительно простые, но громоздкие вычисления, получим:

$$|E^-_\omega|^2 >> |E^+_\omega|^2,$$

мощность прошедшего через пластинку вторичного излучения на частоте 3ω равна

$$W^l_{3\omega} = 2.34 \cdot 10^{-15} |E^-_\omega|^6\, Вт \cdot см^{-2} \quad (E^-_\omega \text{ в } В/см), \tag{40}$$

где $|E^-_\omega|^2$ – квадрат напряженности среднего по образцу электрического поля. В эксперименте падающая на образец мощность излучения (площадь образца $S = 1.4 \cdot 10^{-2}\, см^2$) на частоте $\omega = 4.37 \cdot 10^{11}\, c^{-1}$ равнялась $130\ Вт$ ($9.3 \cdot 10^3\ Вт/см^2$), а поглощенная в образце мощность излучения на той же частоте составляла 30 Bm ($2.14 \cdot 10^3\ Bm/cм^2$), что соответствует $|E_\omega^-|^2 = 10^5\ B^2/cм^2$. Подставляя $|E_\omega^-|^2$ в (40), получим $W_{3\omega}^l = 2.34\ Bm/cм^2$, $W_{3\omega}^l \cdot S = 33\ мBm$ [эксперимент [2] дает $W_{3\omega}^l \cdot S = 30\ мBm$]. Коэффициент преобразования излучения по мощности при тех же условиях равен $K_W^{3\omega} \approx 10^{-3}$. Согласие теории с экспериментом можно считать вполне удовлетворительным.

Выводы. 1. Теоретически показано, что в области высоких частот ($\omega\tau_p >> 1$, где τ_p – время релаксации импульса электронов) узкозонные полупроводники с непараболической зависимостью энергии электронов от импульса ($InSb$, $HgTe$ и другие) являются более эффективными преобразователями электромагнитного излучения, чем полупроводники с параболической зависимостью энергии электронов от импульса. В полупроводниках с параболической зависимостью $\varepsilon(\mathbf{p})$ коэффициент преобразования по току $K(\bar{\omega}, \omega_n)$ в области высоких частот в $\omega\tau_p$ раз меньше, а мощность вторичного излучения $W_{\bar{\omega}}^l$ на комбинированной частоте $\bar{\omega}$ и коэффициент преобразования по мощности $K_W^{\bar{\omega}}$ в $(\omega\tau_p)^2$ раз меньше, чем в узкозонных полупроводниках с непараболическим законом дисперсии.

2. В области промежуточных частот ($\tau_\varepsilon^{-1} << \omega << \tau_p^{-1}$, τ_ε – время релаксации энергии электронов) эффективность преобразования электромагнитного излучения и в тех, и в других перечисленных выше полупроводниках примерно одинакова.

3. Теоретические значения мощности вторичного излучения и коэффициентов преобразования по току и по мощности на тройной частоте в $InSb$ совпадают с экспериментальными значениями, полученными в [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чуенков В. А. ФТП, **6**, N 8, 1413 (1972).

[2] Белянцев А. М., Генкин В. Н., Козлов В. А., Пискарев В. И. ЖЭТФ, **59**, N 3(9), 654 (1970).

[3] Чуенков В. А. Труды ФИАН, **80**, 174 (1975).

Поступила в редакцию 20 июня 2003 г.