Краткие сообщения по физике № 4 1979

СОДЕРЖАНИЕ ПОЛНОГО ОПЫТА ДЛЯ ПРОЦЕССА $\gamma p \to n\pi^+$ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ЭНЕРГИЙ

В. Ф. Грушин, Е. М. Лейкин [ж)], А. Я. Ротвайн [ж)]

УДК 539.І22 + 539.І26.34

Рассмотрен вопрос о наборе экспериментов, обеспечивающих однозначное определение комплексных амплитуд процесса $\gamma p \to n\pi^+$ в s- и p-волновом приближении. Показано, что для осуществления полного опыта достаточно экспериментов группы S и не требуется проведения дважды-поляризационных экспериментов.

В работе /I/ нами было найдено решение задачи о числе и типе экспериментов, обеспечивающих однозначное (с точностью до общей фазы) определение комплексных мультипольных амплитуд процесса $\gamma p \to p\pi^\circ$ в области малых энергий, где справедливо s- и p-волновое приближение. При проведении в этой области энергий мультипольного анализа процесса $\gamma p \to n\pi^+$ необходимо учесть наличие пионного полюса, например, выделив в явном виде вклад от электрических (либо полных) борновских амплитуд /2/. Такая процедура приводит к появлению в выражениях, аппроксимирующих угловую зависимость измеряемых на опыте величин, дополнительных "интерференционных" параметров, линейных относительно искомых мультипольных амплитуд. Это обстоятельство может изменить содержание полного опыта в случае процесса $\gamma p \to n\pi^+$ по сравнению с процессом $\gamma p \to p\pi^\circ$. Отметим, что поскольку борновские амплитуды действительны, фазы искомых мультипольных амплитуд не будут содержать произвола.

Выражения для угловых распределений, входящих в группу экспериментов S (согласно терминологии работы /3/), полученные в ре-

---

ж) НИИЯФ МГУ.

зультате выделения вклада пионного полюса и ограничения парциальными волнами s и p имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\sigma: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{Be}}{d\Omega} + b_0^+ + b_1^+x + b_2^+x^2 + (1 - x^2)\,\frac{c_1^+}{1 - \beta x},\\
&B: \; -\Sigma\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{Be}}{d\Omega} + (1 - x^2)\left(b_3^+ + \frac{c_1^+}{1 - \beta x}\right),\\
&R: \quad P\frac{d\sigma}{d\Omega} = (1 - x^2)^{1/2}\left(b_4^+ + b_5^+x + \frac{c_2^+}{1 - \beta x}\right),\\
&T: \quad T\frac{d\sigma}{d\Omega} = (1 - x^2)^{1/2}\left(b_6^+ + b_7^+x - \frac{c_2^+}{1 - \beta x}\right).
\end{aligned}
\tag{I}
$$

В этих формулах $\frac{d\sigma^{Be}}{d\Omega} = \frac{\xi^2}{2}(1 - x^2)(A^2 + B^2 + 2ABx)$, x – косинус угла вылета π^+-мезона в системе центра масс, β – скорость пиона, $\xi = (1 - \beta x)^{-1}$, A и B – электрические борновские амплитуды /4/. Таким образом, угловые распределения (I) четырех экспериментов группы S содержат десять параметров – наблюдаемых $b_0^+ \div b_7^+$, c_1^+, c_2^+, которые представляют собой билинейные комбинации четырех неизвестных (комплексных) амплитуд канала $\gamma p \to n\pi^+$ $M_1 = E_{0+} - E_{0+}^{Be}$, $M_2 = M_{1-} - M_{1-}^{Be}$, $M_3 = E_{1+} - E_{1+}^{Be}$, $M_4 = M_{1+} - M_{1+}^{Be}$ и двух известных (действительных) электрических борновских амплитуд: $M_5 = A$ и $M_6 = B$. Разложение наблюдаемых $b_0^+ \div b_7^+$, c_1^+, c_2^+ по базисным формам $R_{ij}^M = \frac{1}{2}(M_iM_j^* + M_jM_i^*)$ и $I_{ij}^M = \frac{i}{2}(M_iM_j^* - M_jM_i^*)$ имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
b_0^+ &= R_{11}^M + R_{22}^M + 3R_{23}^M + R_{24}^M + \tfrac{9}{2}R_{33}^M - R_{34}^M - \tfrac{6}{\beta}R_{36}^M + \tfrac{5}{2}R_{44}^M,\\
b_1^+ &= -2R_{12}^M + 6R_{13}^M + 2R_{14}^M,\\
b_2^+ &= -9R_{23}^M - 3R_{24}^M + \tfrac{5}{2}R_{33}^M + 9R_{34}^M + \tfrac{6}{\beta}R_{36}^M - \tfrac{3}{2}R_{44}^M,\\
b_3^+ &= -3R_{23}^M + 3R_{24}^M - \tfrac{9}{2}R_{33}^M + 3R_{34}^M + \tfrac{6}{\beta}R_{36}^M + \tfrac{3}{2}R_{44}^M,\\
b_4^+ &= -2I_{12}^M - 3I_{13}^M - I_{14}^M + \tfrac{1}{\beta}I_{16}^M - \tfrac{1}{\beta}I_{25}^M + \tfrac{3}{\beta}I_{35}^M + \tfrac{6}{\beta}I_{36}^M + \tfrac{1}{\beta}I_{45}^M,\\
b_5^+ &= 9I_{23}^M + 3I_{24}^M + \tfrac{6}{\beta}I_{36}^M,\\
b_6^+ &= 3I_{13}^M - 3I_{14}^M - \tfrac{1}{\beta}I_{16}^M + \tfrac{1}{\beta}I_{25}^M - \tfrac{3}{\beta}I_{35}^M - \tfrac{6}{\beta}I_{36}^M - \tfrac{1}{\beta}I_{45}^M,\\
b_7^+ &= -3I_{23}^M + 3I_{24}^M - 12I_{34}^M - \tfrac{6}{\beta}I_{36}^M,\\
c_1^+ &= R_{16}^M + R_{25}^M + 3R_{35}^M + \tfrac{6}{\beta}R_{36}^M - R_{45}^M,\\
c_2^+ &= I_{15}^M + \tfrac{1}{\beta}I_{16}^M - \tfrac{1}{\beta}I_{25}^M - I_{26}^M + \tfrac{3}{\beta}I_{35}^M + \left(\tfrac{6}{\beta^2} - 3\right)I_{36}^M + \tfrac{1}{\beta}I_{45}^M + I_{46}^M.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Система уравнений (2) относительно искомых амплитуд M_I, M_2, M_3 и M_4 оказывается переопределенной. Однако, как видно из работы /I/, это обстоятельство еще не гарантирует единственности ее решения. Поэтому мы перейдем непосредственно к выяснению вопроса: достаточно ли десяти наблюдаемых, обеспечиваемых экспериментами группы S, для однозначного определения s- и p-волновых мультипольных амплитуд процесса $\gamma p \to n\pi^+$? Мы будем придерживаться той же последовательности рассуждений, что и при рассмотрении аналогичного вопроса для процесса $\gamma p \to p\pi^\circ$ /I/.

Для выяснения возможной симметрии системы уравнений (2) целесообразно перейти к новым амплитудам W_k

$$
\begin{aligned}
W_1 &= M_1 - M_2 + 3M_3 + M_4,\\
W_2 &= M_1 + M_2 - 3M_3 - M_4,\\
W_3 &= M_1 - iM_2 - 3iM_3 + iM_4 - iM_5 + M_6,\\
W_4 &= M_1 - iM_2 - 2iM_4,\quad W_5 = M_5,\quad W_6 = M_6.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Воспользовавшись выражениями для наблюдаемых $b_0^+ \div b_7^+$, c_1^+, c_2^+ через новые базисные формы $R_{ij}^W = \frac{1}{2}(W_iW_j^* + W_jW_i^*)$ и $I_{ij}^W = \frac{1}{2}(W_iW_j^* - W_jW_i^*)$, мы выпишем прежде всего выражения для квадратов модулей $r_k^2 = R_{kk}^W$ четырех комплексных амплитуд W_k:

$$
\begin{aligned}
R_{11}^W &= b_0^+ + b_1^+ + b_2^+,\\
R_{22}^W &= b_0^+ - b_1^+ + b_2^+,\\
R_{33}^W &= b_0^+ - b_3^+ - b_4^+ + b_6^+ + 2c_1^+ + 2c_2^+ + A + B,\\
R_{44}^W &= b_0^+ + b_3^+ - b_4^+ - b_6^+.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Оставшиеся шесть уравнений содержат информацию о фазах W_k. Воспользуемся тем, что амплитуды W_5 и W_6 действительны. Это позволит нам перейти к уравнениям относительно фаз $\varphi_{ks} = \arg W_k$ ($k = I, \ldots 4$). Поскольку знаки W_5 и W_6 противоположны /4/, мы можем записать $R_{k6} = -rR_{k5}$ и $I_{k6} = -rI_{k5}$, где $r = r_6/r_5$. Обозначив также $g = 1 - r/\beta$, мы получим следующую систему уравнений для фаз φ_{k5} комплексных амплитуд $W_1 \div W_4$:

$$
r\left[(1 + \tfrac{1}{\beta})R_{15}^W + (1 - \tfrac{1}{\beta})R_{25}^W\right] + g\left[I_{15}^W + I_{25}^W - 2I_{35}^W\right] = -a_1, \tag{5.I}
$$

$$
r(1 - \tfrac{1}{\beta^2})(R_{15}^W + R_{25}^W - 2R_{35}^W) + g\left[(1 + \tfrac{1}{\beta})I_{15}^W + (1 - \tfrac{1}{\beta})I_{25}^W\right] = a_2, \tag{5.2}
$$

$$2R^W_{13} - R^W_{12} + 2R^W_{15}r + \frac{2g\beta}{1-\beta} I^W_{15} = a_3 + \frac{a_2}{1-\beta}, \qquad (5.3)$$

$$2R^W_{23} - R^W_{12} + 2rR^W_{25} - \frac{2g\beta}{1+\beta} I^W_{25} = a_4 + \frac{a_2}{1+\beta}, \qquad (5.4)$$

$$2R^W_{14} - R^W_{12} = a_5, \qquad (5.5)$$

$$2R^W_{24} - R^W_{12} = a_6, \qquad (5.6)$$

где

$$a_1 = 2c_1^+ + 2gA,$$

$$a_2 = 2c_2^+ + 2(1 - \frac{1}{\beta^2})B,$$

$$a_3 = R^W_{11} - b_4^+ - b_5^+ + b_6^+ + b_7^+ + \frac{2(1+\beta)}{\beta^2} B,$$

$$a_4 = R^W_{22} - b_4^+ + b_5^+ + b_6^+ - b_7^+ + \frac{2(1-\beta)}{\beta^2} B,$$

$$a_5 = R^W_{11} - b_4^+ - b_5^+ - b_6^+ - b_7^+,$$

$$a_6 = R^W_{22} - b_4^+ + b_5^+ - b_6^+ + b_7^+.$$

Таким образом, аналогично /I/, для ответа на вопрос о решении проблемы полного опыта на основе экспериментов группы S необходимо проанализировать систему уравнений (5.I) ÷ (5.6).

Прежде всего покажем, что все решения этой системы могут быть найдены аналитически, при условии, что обеспечена совместность системы. Действительно, с помощью тождества

$$R_{11}R^2_{24} + R_{22}R^2_{14} + R_{44}R^2_{12} = R_{11}R_{22}R_{44} + 2R_{12}R_{14}R_{24}$$

уравнения (5.5) и (5.6) можно свести к кубическому уравнению относительно R^W_{12}. Отбирая решения этого уравнения, удовлетворяющие условию $|R^W_{12}| \leqslant r_1 r_2$, и используя соотношение $I_{12} = \pm (R_{11}R_{22} - R^2_{12})^{1/2}$, мы получим набор допустимых значений R^W_{12} и I^W_{12}. Далее, воспользовавшись соотношениями

$$R_{kk}R_{ij} = R_{ik}R_{jk} + I_{ik}I_{jk}, \qquad (6.I)$$

$$R_{kk}I_{ij} = R_{jk}I_{ik} - I_{jk}R_{ik}, \qquad (6.2)$$

мы можем исключить из уравнений (5.I) и (5.2) неизвестные R^W_{25} и

I^W_{25}. В результате эти два уравнения превратятся в линейные соотношения между R^W_{35}, I^W_{35}, R^W_{15} и I^W_{15}.

Обратимся теперь к уравнениям (5.3) и (5.4) и исключим из них R^W_{13} и R^W_{23}. Для этого воспользуемся тождествами (6.I) и (6.2), а также связью между R^W_{25}, I^W_{25}, R^W_{35}, I^W_{35} с одной стороны и R^W_{15}, I^W_{15} с другой. В результате два уравнения (5.3) и (5.4) превращаются в полные уравнения второго порядка относительно R^W_{15} и I^W_{15}. Еще одно полное уравнение второго порядка относительно R^W_{15} и I^W_{15} можно получить из уравнений (5.I) и (5.2), если воспользоваться соотношением $R^2_{35} + I^2_{35} = R_{33}R_{55}$. Таким образом мы получаем переопределенную систему уравнений относительно R^W_{15} и I^W_{15} вида

$$\begin{gathered}
a_{11}(R^W_{15})^2 + a_{12}R^W_{15}I^W_{15} + a_{01}R^W_{15} + a_{02}I^W_{15} = a_0,\\
b_{11}(R^W_{15})^2 + b_{12}R^W_{15}I^W_{15} + b_{01}R^W_{15} + b_{02}I^W_{15} = b_0,\\
c_{11}(R^W_{15})^2 + c_{12}R^W_{15}I^W_{15} + c_{01}R^W_{15} + c_{02}I^W_{15} = c_0,\\
(R^W_{15})^2 + (I^W_{15})^2 = R^W_{11}A.
\end{gathered} \tag{7}$$

Коэффициенты этой системы зависят от значений R^W_{12} и I^W_{12}, благодаря чему происходит селекция решений кубического уравнения относительно R^W_{12} и знака I^W_{12}. Можно убедиться, что требование совместности системы (7) обеспечивает как единственность решения для R^W_{15}, I^W_{15}, так и отбор единственного значения для R^W_{12} и I^W_{12}. В свою очередь, этих четырех величин оказывается достаточно для однозначного определения остальных фаз. Действительно, с помощью (6.I) и (6.2) можно найти R^W_{25} и I^W_{25}. Далее, используя линейные уравнения (5.I) и (5.2), можно определить R^W_{35} и I^W_{35}. Наконец, R^W_{45} и I^W_{45} можно найти, применяя (6.I) и (6.2) к R^W_{14}, I^W_{14}, R^W_{15} и I^W_{15}. В свою очередь R^W_{14}, а также R^W_{24} определяются из уравнений (5.5) и (5.6), а I^W_{14} получается с помощью (6.I) из уже известных величин. Таким образом, удается однозначно определить $\cos\varphi_k = R^W_{k5}/r_k r_5$ и $\sin\varphi_k = I^W_{k5}/r_k r_5$ для $k = 1,\ldots 4$. Вместе с найденными ранее четырьмя модулями r_k, $(k = 1,\ldots 4)$ этих фаз достаточно, чтобы получить единственный набор всех комплексных амплитуд W_k. Поскольку преобразование, связывающее амплитуды M_k и W_k, линейно и невырожденно, мы получаем единственное решение и для амплитуд M_k $(k = 1,\ldots 4)$. Тем самым мы продемонстрировали достаточность экспериментов группы S для осуществления в области малых энергий полного опыта для процесса $\gamma p \to n\pi^+$. Мы видим, что в этом случае для однозначного определения мультипольных амплитуд вообще не требуется проведения дважды-поляризационных экспериментов.

Поступила в редакцию
29 декабря 1978 г.

Литература

1. В. Ф. Грушин, Е. М. Лейкин, А. Я. Ротвайн, Краткие сообщения по физике ФИАН № 11, 20, 1978 г.
2. А. М. Балдин, Труды ФИАН, 19, 3 (1960).
3. I. S. Barker, A. Donnachie, I. K. Storrow, Nucl. Phys., B95, 347 (1975).
4. F. Berends, A. Donnachie, D. Weaver, Nucl. Phys. B4, 1 (1969).