*Краткие сообщения по физике № 11 1979*

# О ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБОБЩЕННЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ ГРУПП $SU_n$

В. П. Карасев, Л. А. Шелепин

УДК 530.I

Дан метод вычисления коэффициентов разложения произведений $\prod_{i=1}^{m}|P^i;Z^i\rangle$ обобщенных когерентных состояний (ОКС) НП $D(P^i)$ групп $SU_n$ по ОКС $|P;Z\rangle$ НП $D(P)\subset\prod_{i=1}^{m}D(P^i)$. Получены явные формулы для случая $D(P^i)\equiv D([p_1^i0\ldots0])$ и для коэффициентов разложения по $|P;Z\rangle$ многомодовых глауберовских КС.

I. Обобщенные когерентные состояния (ОКС) групп Ли нашли широкое применение в различных областях физики /I-3/. В частности, в /2,3/ была отмечена важная роль ОКС $SU_n$ при исследовании различных аспектов взаимодействия когерентного электромагнитного излучения с веществом в рамках обобщенной модели Дике. При этом в работе /3/ с помощью реализации ОКС $SU_n$ в виде производящих инвариантов (ПИ) получены простые формулы и конечные алгоритмы для вычисления интенсивностей и корреляционных функций излучения. Более детальный анализ задачи взаимодействия излучения с веществом в рамках данного подхода требует нахождения коэффициентов декомпозиции произведений ОКС, аналогичных коэффициентам Клебша-Гордана (КГ) для систем ортонормальных состояний. Такие коэффициенты декомпозиции ОКС для группы $SU_2$ найдены в работе /4/.

Цель настоящей работы - разработка метода получения коэффициентов декомпозиции произведений ОКС $SU_n$ с помощью развитой в /5/ техники ПИ. При этом будут получены точные формулы для коэффициентов разложения произведений ОКС вида $\prod_{i=1}^{m} |[p_1^i 0 \ldots 0];$ $z^i>$ и одновременно установлены связи этих коэффициентов с обычными коэффициентами Вигнера, аналогичные установленным в /4/ для группы $SU_2$.

2. Исходным пунктом данного рассмотрения является обобщающая представление /6/ запись ОКС $SU_n$ $|P:Z>$ в пространствах $L^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m) \subset \prod_{i=1}^{m} L^{P^i}(X^i)$, где $L^{P^i}(X^i)$ – пространство неприводимого представления (НП) $D(P^i)$ $SU_n$, реализованное однородными полиномами от $(n-1)$ векторов $x^i_j \equiv (x^i_{kj})$, $X^i \equiv (x^i_j)$, а $L^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m)$ – соответствующее редукции $\prod_{i=1}^{m} D(P^i) \to D^\gamma(P)$ пространство НП $D^\gamma(P) \sim D(P)$, $\gamma$ – индекс, различающий кратные НП в обобщенном ряду КГ группы $SU_n$. Согласно /5/, редукции $\prod_{i=1}^{m} D(P^i) \to D^\gamma(P)$ соответствует при фиксированной схеме связи $\Gamma$ неприводимых представлений $D(P^i)$ производящий инвариант $J^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m;A)$:

$$J^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m;A) \equiv \sum_{\{\nu_i\}} \begin{pmatrix} P^1 & P^2 & \ldots & P^m & \bar{P} & \Gamma \\ \nu_1 & \nu_2 & \ldots & \nu_m & \bar{\nu} & \gamma \end{pmatrix} |\bar{P};\bar{\nu}>(A) \prod_{i=1}^{m} |P^i;\nu_i>(X^i), \tag{I}$$

построенный с помощью коэффициентов Вигнера $(m+1)$-го ранга из базисных векторов $|P^i;\nu_i>(X^i)$, $|\bar{P};\bar{\nu}>(A)$ неприводимых представлений $D(P^i)$, $D(\bar{P})$ $(\bar{P} = [p_{n-1}\ldots p_1])$, реализованных однородными полиномами от векторов $x^i_j \in X^i$, $a_j \in A$. Старший вектор $|P;\Gamma,\gamma;max>(X^1,\ldots,X^m)$ в $L^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m)$ определяется по ПИ (I) соотношением

$$|P;\Gamma,\gamma;max>(X^1,\ldots,X^m) = [\dim P]^{1/2} |\bar{P};min>(\bar{A}) J^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m;A), \tag{2}$$

где $\dim P$ – размерность НП $D(P)$ (и $D(\bar{P})$)

$$|\bar{P};min>(\bar{A}) = N(P) \prod_{i=1}^{n-1} [\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_i e^*_1 \ldots e^*_{n-i}]^{p_{n-i}}, \tag{3}$$

$$N(P) = \left[\prod_{m=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{i=m-k}^{m} p_i + k\right)^{(p_m)}\right]^{-1/2},$$

$$\bar{a}_i \equiv (\bar{a}_{ji}) = (\partial/\partial a_{ji}),\ e_i^* = (\delta_{ji}). \tag{3}$$

Тогда, в соответствии с общей схемой определения ОКС групп Ли /7/ и результатами /6/, ОКС $SU_n|P;\Gamma,\gamma;u>(X^1,\ldots,X^m)$, порождаемые в $L^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m)$ вектором $|P;\Gamma,\gamma;\max>(X^1,\ldots,X^m)$, задаются в ПИ-подобной форме следующим образом:

$$|P;\Gamma,\gamma;u>(X^1,\ldots,X^m) = N(P)[\dim P]^{1/2}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1}\left[\bar{a}_1\ldots\bar{a}_i u_1\ldots u_{n-i}\right]^{p_{n-i}} J^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m;A), \tag{4}$$

где $u_i \equiv (u_{ki})$ – i-тый столбец матрицы $u\in SU_n$.

Таким образом, знание явного вида ПИ $J^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m;A)$ позволяет автоматически выписывать в ПИ-подобной форме ОКС $SU_n$ в $L^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(\ldots)$. Такие ПИ могут быть построены из простейших ПИ для коэффициентов Вигнера (или КГ) 3-го (2-го) ранга с помощью рекуррентных процедур работ /5/. Так, например, фиксируя последовательную схему связывания $\Gamma = (\ldots(12)3\ldots m)$ пространств $L^{P^i}(X^i) = L^{[p_1^i\dot{0}]}(x_i)$, $\dot{0}\equiv 0\ldots 0$, и используя результаты /8/, для ПИ $J^{P;\Gamma,\gamma}_{\{[p_1^i\dot{0}]\}}(x_1,\ldots,x_m;A)$, соответствующего редукции $\prod_{i=1}^{m} D([p_1^i\dot{0}])\to D^{\gamma}(P)$, имеем следующее выражение:

$$J^{P;\Gamma,\gamma}_{\{[p_1^i\dot{0}]\}}(x_1,\ldots,x_m;A) = \prod_{\alpha=1}^{m-2} N(P^\alpha)N(\bar{P}^\alpha)[\dim P^\alpha]^{1/2}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n-1}\left[\bar{v}_1^\alpha\ldots\bar{v}_j^\alpha\bar{y}_1^\alpha\ldots\bar{y}_{n-j}^\alpha\right]^{\bar{p}_j^\alpha} J^{\{u_k^1\}}_{\{[p_1^1\dot{0}];[p_1^2\dot{0}]\}}(x_1;x_2;y_1^1,\ldots,y_{n-1}^1)\times$$

$$\times J^{\{u_k^{\alpha+1}\}}_{\{P^\alpha;[p_1^{\alpha+2}\dot{0}]\}}(v_1^\alpha,\ldots,v_{n-1}^\alpha;x_{\alpha+2};y_1^{\alpha+1},\ldots,y_{n-1}^{\alpha+1}),$$

$$y_i^{m-1}\equiv a_i,\ P^\alpha\equiv[p_j^\alpha], \tag{5}$$

где ПИ $J^{\{u_k^\beta\}}_{\{\ldots\}}(\ldots;x_{\beta+1};\ldots)$ задаются формулами (I) – (3),(7), (8) работы /8/ (в правую часть формулы (8) надо добавить пропущенный множитель $\left(P_1'' - \sum_{i=1}^{n-1} u_i\right)!$).

Таким образом, формулы типа (4),(5) определяют ОКС $SU_n$ в $L^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m)$, порождаемые старшим вектором. Аналогичную форму (с заменой $u_i \to z_i$) будут иметь также и ОКС $|P;\Gamma,\gamma;Z>$, конструируемые, как и в /6/, из более общих векторов пространства $L^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(\ldots)$; при этом, однако, выражение типа (4) следует дополнить нормировочным множителем $\rho(Z)$ (см. /6/).

3. Полученные выше формулы для ОКС $SU_n$ в $L^{P;\Gamma,\gamma}_{\{P^i\}}(X^1,\ldots,X^m)$ вместе с результатами работы /6/ позволяют непосредственно вычислять коэффициенты $<P;\Gamma,\gamma;Z|P^1;Z^1|\ldots|P^m;Z^m>$ разложения произведений $\prod_{i=1}^{m}|P^i;Z^i>(X^i)$ по ОКС $|P;\Gamma,\gamma;Z>(X^1,\ldots,X^m)$ согласно определению (ср. /4/):

$$<P;\Gamma,\gamma;Z|P^1;Z^1|\ldots|P^m;Z^m> \equiv$$

$$\equiv |P;\Gamma,\gamma;Z^*>(\overline{X}^1,\ldots,\overline{X}^m)\prod_{i=1}^{m}|P^i;Z^i>(X^i), \qquad (6)$$

где $|P;\Gamma,\gamma;Z^*>(\overline{X}^1,\ldots,\overline{X}^m)$ определяются подстановкой $u_i \to z_i^* \in Z^*$, $X^i \to \overline{X}^i$ и умножением на нормировочный множитель $\rho(Z)$ из (4), (5), а $|P^i;Z^i>(X^i)$ – формулами (8),(9) работы /6/. В частности, для коэффициентов $<P;\Gamma,\gamma;Z|[p_1^1\dot{0}];\{\xi_i^1\}|\ldots$ $\ldots|[p_1^m\dot{0}];\{\xi_i^m\}>$ находим с помощью (4), (5)

$$<P;\Gamma,\gamma;Z|[p_1^1\dot{0}];\{\xi_i^1\}|\ldots|[p_1^m\dot{0}];\{\xi_i^m\}> =$$

$$= N(P)[\dim P]^{1/2}\prod_{i=1}^{m}[\bar{a}_1\ldots\bar{a}_i z_1^*\ldots z_{n-i}^*]^{P_{n-i}}\times$$

$$\times J^{P;\Gamma,\gamma}_{\{[p_1^i\dot{0}]\}}(\xi^1,\ldots,\xi^m;A)\prod_{j=1}^{m}\sqrt{p_1^j!}\,(\xi^{j*}\xi^j)^{-p_1^j/2}, \qquad (7)$$

где

$$\xi_i^k = \left[e_i z_1^k\ldots z_{n-1}^k\right],\ k = 1,\ldots,m;\quad (\xi^{j*}\xi^j) \equiv \sum_{i=1}^{n}\xi_i^{j*}\xi_i^j.$$

Отметим, что правая часть полученной формулы (7) задает с точностью до множителя $\exp\left(-1/2\sum_{i,k}|\xi_i^k|^2\right)\prod_{j=1}^{m}(\xi^{j*}\xi^j)^{p_1^j/2}(p_1^j)^{-1/2}$ и коэффициенты разложения по ОКС $|P;\Gamma,\gamma;Z\rangle$ многомодовых обычных (глауберовских) КС /9,IO/

$$\prod_{i,k}|\xi_i^k\rangle = \exp\left(-1/2\sum_{i,k}|\xi_i^k|^2\right)\sum_{\{p_1^j\}}\prod_{j=1}^{m}(a_j^+\xi^j)^{p_1^j}(p_1^j!)^{-1}$$

при швингеровской реализации пространств $L^{P^i}$ с помощью бозонных операторов $a_j^+ = \{a_{kj}^+\}$. Этот результат важен для детального анализа взаимодействия электромагнитного поля (описываемого глауберовскими КС /9,IO/) с веществом (описываемым ОКС $SU_n$ /3/).

В заключение укажем, что используя в (6) выражения типа (I), нетрудно установить, что коэффициенты декомпозиции произведений ОКС $\langle P;\Gamma,\gamma;Z|P^1;Z^1|\ldots|P^m;Z^m\rangle$ являются производящими функциями для обычных (в ортонормальных базисах) коэффициентов Вигнера и КГ $SU_n$ (ср. /4/).

Поступила в редакцию
4 июля I979 г.

## Литература


I. А. М. Переломов, УФН, I23, 23 (I977).
2. В. В. Зверев, ТМФ, 29, 40I (I976).
3. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН № 5, 20 (I979).
4. J. Bellissard, R. Holtz, Math. Phys., 15, 1275 (1974).
5. В. П. Карасев и др., Труды ФИАН, I06, II9 (I979); В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, ТМФ, 36, 279 (I978).
6. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН № 6, I4 (I978).
7. A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys., 26, 222 (1972).
8. В. П. Карасев, П. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН № I2, 27 (I977).
9. R. J. Glauber, Phys. Rev., 130, 2529 (1963).
IO. Когерентные состояния в квантовой теории, сборник статей, "Мир", М., I972 г.