УДК 539

НИЗКОЧАСТОТНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ВЫРОЖДЕННОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ

С. А. Маслов[1,2], Н. Г. Гусейн-заде[3], С. А. Тригер[1,3]

Исследована низкочастотная асимптотика спектральной плотности распределения энергии равновесного излучения в бесстолкновительном вырожденном электронном газе. Показано, что учет пространственной дисперсии в диэлектрической проницаемости электронного газа приводит к логарифмической особенности в спектральной плотности распределения при малых частотах, подобной полученной авторами ранее для максвелловской плазмы. При этом вклад от низких частот в полную энергию излучения остается конечным. Результаты аналитического рассмотрения совпадают с численным расчетом.

Ключевые слова: спектральная плотность излучения, вырожденный электронный газ, диэлектрическая проницаемость.

Описание спектрального распределения энергии равновесного излучения, данное М. Планком [1], привело к становлению квантовой теории. Планковское распределение соответствует идеализированной модели вещества, рассматриваемого как абсолютно черное тело. Примером является полость, заполненная излучением и ограниченная хорошо поглощающим веществом. При этом предполагается, что излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом, хотя эффекты взаимодействия фотонов с ограничивающим веществом не рассматриваются [2]. Возможная реализация распределения Планка обычно связывается с рассмотрением макроскопического тела, находящегося в тепловом равновесии с окружающим его “черным” излучением [2]. В решении этой задачи, имеющей непосредственное отношение к закону Кирхгофа, до-

[1] ОИВТ РАН, 125412 Россия, Москва, ул. Ижорская, 13; e-mail: satron@mail.ru.
[2] МГУ имени М.В. Ломоносова, 119991 Россия, Москва, ул. Ленинские горы, 1.
[3] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38.

стигнуты большие успехи (см. подробнее [3–5] и цитированную там литературу). В то же время вопросу о спектральном распределении энергии излучения в самом веществе, находящемся в состоянии равновесия, уделялось мало внимания (см. [6] и цитированную там литературу). Решение этой задачи в основном ограничивалось анализом областей прозрачности, когда конечной величиной затухания излучения пренебрегается. Ограниченность такого подхода очевидна, так как из физических соображений ясно, что для установления термодинамического равновесия излучения в веществе необходимо учитывать эффекты поглощения излучения. Последовательному рассмотрению вопроса о влиянии поглощающей плазменной среды на спектральное распределение энергии равновесного излучения в веществе посвящены недавние статьи [7–10]. В этих работах рассмотрение проводилось как для полностью равновесной системы нерелятивистских заряженных частиц и фотонов [7–9], так и на основе обобщения более традиционного подхода, использующего флуктуационно-диссипационную теорему [10]. Различие этих подходов, в частности, связывается с различием в процедуре выделения нулевых колебаний. В [7–9] они исходно постулируются в вакуумном виде, а в [10] выделяются на конечном этапе, что приводит к их зависимости от параметров среды (см. также [3]). Ниже при вычислении асимптотического поведения спектральной плотности излучения мы будем базироваться на результатах работ [7–9].

Спектральная плотность распределения энергии равновесного излучения вырожденного электронного газа в предположении $T_* = T/E_F \ll 1$ вычисляется как [8]

$$F(W) = \frac{(2\alpha_\Delta W/T_*)^3}{\exp(2\alpha_\Delta W/T_*) - 1} + \left(\frac{2\alpha_\Delta W}{T_*}\right)^3 \coth\left(\frac{\alpha_\Delta W}{T_*}\right) \times \tag{1}$$

$$\times \left(\frac{C^5}{\pi W^3} \int\limits_0^\infty dQ \cdot Q^4 \frac{W^2 \mathrm{Im}\varepsilon^{tr}(Q,W)}{|\varepsilon^{tr}(Q,W)W^2 - C^2Q^2|^2} - \frac{1}{2} \right),$$

где $\varepsilon^{tr}(Q,W)$ – поперечная диэлектрическая проницаемость, $W = \omega/\omega_p$, $Q = q/q_F$, $T_* = T/E_F$ – безразмерные частота ω, волновое число q и электронная температура T соответственно; $C = cq_F/\omega_p$ – безразмерная скорость света c в вакууме; $\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}$, $q_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n}$, $E_F = (\hbar q_F^2)/(2m)$ – плазменная частота, волновое число Ферми и энергия Ферми соответственно; n, e, m – концентрация, заряд и масса электронов; $\alpha_\Delta = (4r_s/3\pi)^{1/2} \cdot (4/9\pi)^{1/6}$, где $r_s = \sqrt[3]{3/4\pi n a_0^3}$, $a_0 = \hbar^2/me^2$ – боровский радиус. Согласно [11], запишем формулы для $W^2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)$ и $W^2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)$ в случае вырожденного электронного газа в пренебрежении обменно-корреляционными эффектами:

$$W^2\mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)-C^2Q^2=W^2-1-C^2Q^2-\frac{3}{8}\Bigg\{3\left(\frac{\alpha_\Delta W}{Q}\right)^2+\frac{Q^2}{4}-\frac{5}{3}+\frac{1}{2Q}[1-(\Delta^{(-)}(Q,W))^2]^2\times$$

$$\times\ln\left|\frac{1+\Delta^{(-)}(Q,W)}{1-\Delta^{(-)}(Q,W)}\right|-\frac{1}{2Q}\left[1-(\Delta^{(+)}(Q,W))^2\right]^2\ln\left|\frac{1+\Delta^{(+)}(Q,W)}{1-\Delta^{(+)}(Q,W)}\right|\Bigg\}-\frac{3Q^2}{8}\Bigg\{1-\frac{1}{2Q}[1-$$

$$-(\Delta^{(-)}(Q,W))^2]\ln\left|\frac{1+\Delta^{(-)}(Q,W)}{1-\Delta^{(-)}(Q,W)}\right|+\frac{1}{2Q}[1-(\Delta^{(-)}(Q,W))^2]\ln\left|\frac{1+\Delta^{(-)}(Q,W)}{1-\Delta^{(-)}(Q,W)}\right|\Bigg\}, \quad (2)$$

где $\Delta^{(-/+)}(Q,W)=\alpha_\Delta W/Q\mp Q/2$, а $W^2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)$ представляется в виде

$$W^2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)=\frac{3\pi}{16Q}\times$$

$$\times\begin{cases}0,\ 0\le Q\le\sqrt{1+2\alpha_\Delta W}-1 & \text{или}\,Q\ge\sqrt{1+2\alpha_\Delta W}+1\\ \alpha_\Delta W\left[4-4(\alpha_\Delta W/Q)^2+Q^2\right], & 1-\sqrt{1-2\alpha_\Delta W}\le Q\le 1+\sqrt{1-2\alpha_\Delta W},\\ \left[1-(\Delta^{(-)})^2\right]^2+Q^2\left[1-(\Delta^{(-)})^2\right], & \text{иначе.}\end{cases} \quad (3)$$

Безразмерную скорость света C в формулах (1), (2) можно выразить через r_s как $C=cq_F/\omega_p=c/e\cdot\sqrt[3]{9\pi/4}\cdot\sqrt{ma_0r_s/3}\approx 137.61\sqrt{r_s}$, откуда при $r_s\sim 1$ значение $C\gg 1$.

Исследуем асимптотическое поведение $F(W)$ при $W\cong 0$, $CW\ll T_*\ll 1$, $r_s\sim 1$, $C\gg 1$. В этих предположениях формулу (1) можно приближенно записать как

$$F(W)\cong\int\limits_0^\infty f(Q,W)dQ+O(W^3),\ f(Q,W)=\frac{8C^5Q^4}{\pi W}\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2\cdot\frac{W^2\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)}{|\varepsilon^{tr}(Q,W)W^2-C^2Q^2|^2}. \quad (4)$$

Рассмотрим поведение $f(Q,W)$ при различных Q.

1. $Q/\alpha_\Delta W\ll 1$. В этом случае в формуле (3) $0\le Q\le\sqrt{1+2\alpha_\Delta W}$, следовательно, $W^2\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)=0$. Путем разложения (2) в ряд Маклорена по Q можно показать, что $W^2\mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)-C^2Q^2\cong -1\neq 0$, поэтому в (4) $f(Q,W)=0$.

2. $Q\sim\alpha_\Delta W$. Асимптотическое поведение (2) удовлетворяет выражению

$$W^2\mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)-C^2Q^2\cong-\frac{3\alpha_\Delta W}{4Q}\left(\frac{2\alpha_\Delta W}{Q}+\left(\left(\frac{\alpha_\Delta W}{Q}\right)^2-1\right)\ln\left|\frac{1+\alpha_\Delta W/Q}{1-\alpha_\Delta W/Q}\right|\right), \quad (5)$$

которое не равно 0 при $Q/\alpha_\Delta W < 1$ и стремится к –3/2 при $Q/\alpha_\Delta \cong 1$. Из (3)–(5) при $0 \le Q \le \sqrt{1+2\alpha_\Delta W} - 1$ функция $f(Q,W) = 0$, в остальных случаях

$$f(Q,W) \cong \frac{8C^2Q^5}{3W}\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2, \ \sqrt{1+2\alpha_\Delta W} - 1 \le Q \le 1 - \sqrt{1-2\alpha_\Delta W},$$

$$f(Q,W) \le \frac{8C^2Q^4}{\pi W^3 \mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(Q,W)}\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2 < \frac{64C^5Q^3}{3\pi^2 W}\cdot\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2, \tag{6}$$
$$1 - \sqrt{1-2\alpha_\Delta W} \le Q \le 1 + \sqrt{1-2\alpha_\Delta W}.$$

3. $\alpha_\Delta W \ll Q \ll \sqrt{2\alpha_\Delta W}$. В силу неравенства $1-\sqrt{1-2\alpha_\Delta W} \le Q \le 1+\sqrt{1-2\alpha_\Delta W}$ второе выражение (6) также справедливо.

4. $\sqrt{2Z\alpha_\Delta W} \le Q \ll 1$, $Z \ne 0$ и конечно. Асимптотическое поведение $W^2 \mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(Q,W) \cong 3\pi\alpha_\Delta W/4Q$, а $W^2 \mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(Q,W) - C^2Q^2 \cong -C^2Q^2$ при $C \gg 1$, следовательно,

$$f(Q,W) \cong \left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2 \cdot \frac{6C^5\alpha_\Delta Q^3}{C^4Q^4 + (3\pi\alpha_\Delta W/4Q)^2}, \tag{7}$$

причем если $Q \gg (\alpha_\Delta W)^{1/3}$, то $C^4Q^4 + (3\pi\alpha_\Delta W/4Q)^2 \cong C^4Q^4$.

5. $Q \sim 1$ или $Q \gg 1$. Как и в предыдущем случае, асимптотика (2) при $C \gg 1$ имеет вид $W^2 \mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(Q,W) - C^2Q^2 \cong -C^2Q^2$, откуда с учетом (3) получаем:

$$f(Q,W) \cong \frac{6C}{QW}\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2 \times \begin{cases} 0, \ Q \ge 1 + \sqrt{1+2\alpha_\Delta W}, \\ \alpha_\Delta W(1+Q^2/4), \ Q \le 1 + \sqrt{1-2\alpha_\Delta W}, \\ Q(1-Q/2), \ \text{иначе}. \end{cases} \tag{8}$$

С целью дальнейшего исследования представим интеграл в (4) в виде суммы

$$\int\limits_0^\infty f(Q,W)dQ = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \ I_1 = \int\limits_{\sqrt{1+2\alpha_\Delta W}-1}^{1-\sqrt{1-2\alpha_\Delta W}} f(Q,W)dQ,$$

$$I_2 = \int\limits_{1-\sqrt{1-2\alpha_\Delta W}}^{\sqrt{2\alpha_\Delta W}} f(Q,W)dQ, \ I_3 = \int\limits_{\sqrt{2\alpha_\Delta W}}^{(2\alpha_\Delta W)^{1/5}} f(Q,W)dQ, \tag{9}$$

$$I_4 = \int\limits_{(2\alpha_\Delta W)^{1/5}}^{1+\sqrt{1-2\alpha_\Delta W}} f(Q,W)dQ, \ I_5 = \int\limits_{1+\sqrt{1-2\alpha_\Delta W}}^{1+\sqrt{1+2\alpha_\Delta W}} f(Q,W)dQ.$$

Используя (6)–(8) и учитывая, что при малых Q справедливо приближенное равенство $3\pi\alpha_\Delta W/4Q \cong 3\pi\alpha_\Delta W/4Q \cdot (1 + Q^2/4)$, получаем:

$$I_1 \cong \frac{8C^5\alpha_\Delta(2\alpha_\Delta W)^6}{3}\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2,\ I_2 < \frac{16C^5(2\alpha_\Delta W)^2}{3\pi^2 W}\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2,$$

$$I_3 \cong C\alpha_\Delta\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2\left\{\ln\left[(2\alpha_\Delta W)^{6/5}C^4\right] - 2\ln\left(\frac{3\pi\alpha_\Delta W}{4}\right)\right\}, \tag{10}$$

$$I_4 \cong 6C\alpha_\Delta\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2\left[\ln 2 - \ln(2\alpha_\Delta W)^{1/5} + \frac{1}{2}\right],\ I_5 \cong \frac{3C}{W}\left(\frac{\alpha_\Delta}{T_*}\right)^2(\alpha_\Delta W)^3.$$

Из (4), (9), (10) следует асимптотика (1):

$$F(W) \cong \frac{C\alpha_\Delta^3}{T_*^2}\left[2(2\ln C + 3\ln 2) - 2\ln\frac{3\pi\alpha_\Delta W}{4} + 3\right]. \tag{11}$$

На рис. 1 для примера представлены сравнительные графики спектральной функции распределения (1) и ее асимптотики при $T_* = 0.1$, $r_s = 1 (C \approx 137.16)$. Видно, что в случае $T_* \ll 1$, $C \gg 1$ асимптотическое поведение $F(W)$ при $W \cong 0$ удовлетворяет (11).

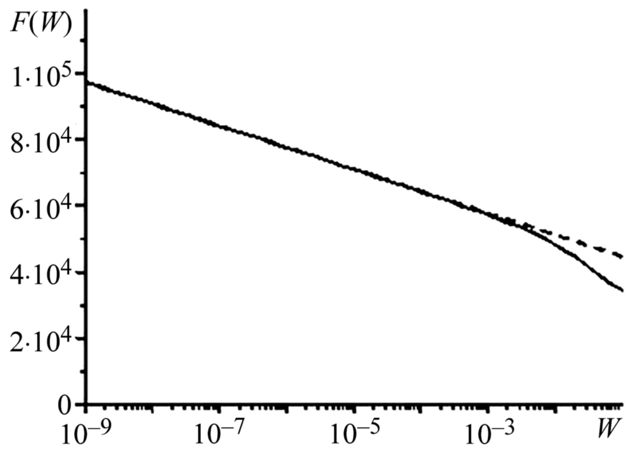

Рис. 1: *Графики функции $F(W)$ (сплошная линия) и ее асимптотического поведения, найденного аналитически (штриховая линия), при $T_* = 0.1$, $r_s = 1$. По горизонтальной оси масштаб логарифмический, по вертикальной – линейный.*

Таким образом, влияние вырожденных электронов принципиально меняет поведение спектральной плотности излучения на малых частотах в сравнении с планковской. Отметим, что наличие логарифмического роста спектральной плотности излучения при малых частотах не приводит к расходимости полной энергии излучения, являющейся интегралом по частоте от спектральной плотности излучения. Результаты работы могут быть применены как при экспериментальном исследовании излучения металлов в жидком и твердом состояниях, так и для астрофизических приложений, включая изучение моделей ранней Вселенной на определенных этапах ее эволюции.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-50-00124).

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике* (М., Наука, 1967).

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, часть 1* (М., Наука, 1976).

[3] М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике* (М., Наука, 1967).

[4] А. И. Волокитин, Б. Н. Дж. Перссон, УФН **177**, 921 (2007).

[5] Е. А. Виноградов, И. А. Дорофеев, УФН **179**, 449 (2009).

[6] S. A. Trigger, Phys. Lett. A **370**, 365 (2007).

[7] В. Б. Бобров, И. М. Соколов, С. А. Тригер, Письма в ЖЭТФ **101**, 326 (2015).

[8] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, Теоретическая и математическая физика **187**, 104 (2016).

[9] С. А. Маслов, С. А. Тригер, Н. Г. Гусейн-заде, Краткие сообщения по физике ФИАН **45**(8), 14 (2018).

[10] А. Г. Загородний, С. А. Тригер, Краткие сообщения по физике ФИАН **45**(5), 45 (2018).

[11] S. A. Maslov, V. B. Bobrov, A. V. Kirillin and S. A. Trigger, J. Phys. Conf. Ser. **946**, 012125 (2018).

Поступила в редакцию 14 сентября 2018 г.

После доработки 15 ноября 2018 г.

Принята к публикации 15 ноября 2018 г.