*Краткие сообщения по физике № 12 1979*

# О МНОГОСОЛИТОННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ SINE-GORDON УРАВНЕНИЯ

А. С. Широков

УДК 517.946

Получены условия существования стационарных многосолитонных решений Sine-Gordon уравнения. Показано, что такие решения сводятся к почти линейным комбинациям простых и двойных солитонов, когда расстояние между последними превышает их размеры.

Sine-Gordon уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \tag{I}$$

с граничными условиями

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0 \pmod{2\pi} \tag{2}$$

имеет два известных решения

$$u^{(1)}(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\,\exp\left\{\pm (x - vt)/\sqrt{1 - v^2}\right\},$$
$$u^{(2)}(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{b\sin\left[\omega(t - vx - t_0)/\sqrt{1 - v^2}\right]}{\omega\,\mathrm{ch}\left[b(x - vt - x_0)/\sqrt{1 - v^2}\right]}\right\}, \tag{3}$$

$$|v| < 1, \quad b^2 + \omega^2 = 1, \tag{4}$$

которые называют /I/ простым и двойным солитонами, соответственно. Оба эти решения являются стационарными, то есть сохраняющими свой вид со временем, а при рассмотрении солитонов в их собственной системе отсчета ($v = 0$) простой солитон оказывается статическим, а двойной – периодичным во времени. О возможной стационарности других, многосолитонных решений, которые можно получить, например, путем преобразований Беклунда /2/, используя решения (3) и (4), в литературе нет единого мнения. Так, например, в работах /3/, /4/, /5/ утверждается, что любое решение более сложной структуры распадается со временем на простые и двойные солитоны и в /6/ приведена численная иллюстрация такого распада. Это утверждение доказано в работе /7/, однако только для определенных условий. В работе /I/ говорится, что в общем случае распад многосолитонных решений имеет место, однако это не исключает возможности существования условий, при которых эти решения не переходят при $t \to \pm\infty$ в совокупность простых и двойных солитонов.

Ниже мы покажем, что не только решения (3) и (4), но и более сложные, многосолитонные решения Sine-Gordon уравнения могут сохранять свою форму со временем, то есть не распадаться на простые и двойные солитоны, а быть стационарными образованиями. Для этого рассмотрим решение уравнения (I) с граничными условиями (2), полученное методом обратной задачи рассеяния в работе /I/:

$$u(x,t) = -2i \ln \frac{\det(I + V(x,t))}{\det(I - V(x,t))}, \tag{5}$$

где $V(x,t)$ - матрица $N \times N$ с элементами

$$V_{jk}(x,t) = \frac{im_j}{\lambda_j + \lambda_k} \exp\left[ i(\mu_j + \mu_k)x + 2i\left(\lambda_j + \frac{1}{16\lambda_j}\right)t\right],$$

$\mu_j = \lambda_j - (1/16\lambda_j)$; $m_j$, $\lambda_j$ - произвольные комплексные числа.

В частных случаях

$$N = 1, \quad \mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\, m_1 = 0, \tag{6}$$

и

$$N = 2, \quad \lambda_1 = -\lambda_2^*, \quad m_1 = -m_2, \quad \mathrm{Im}\, m_{1,2} = 0, \tag{7}$$

формула (5) в явном виде дает решения (3) и (4), соответственно. При других значениях $N > 2$ решение (5) принимает весьма сложный явный вид. Однако, учитывая постановку задачи, сразу укажем общее условие стационарности решения (5). Непосредственно из выражения для $V_{jk}(x,t)$ следует, что достаточным условием стационарности (5) является требование

$$\mathrm{Im}(\lambda_j + 1/16\lambda_j) = 0 \quad \text{или} \quad |\lambda_j|^2 = 1/16, \quad j = 1,\ldots,N, \tag{8}$$

так как при этом зависимость от времени будет определяться только функциями $\cos(4\mathrm{Re}\lambda_j t)$ и $\sin(4\mathrm{Re}\lambda_j t)$. Стационарность решения (5) при условии (8) означает, что при любом N имеем решение, не распадающееся на простые и двойные солитоны, в то время как при нарушении (8) в $V(x,t)$ появятся члены типа $\exp(\pm t)$, которые обусловят распад решения. Заметим, что если все $\mathrm{Re}\lambda_j$ будут равны, (5) окажется строго периодичным во времени, тогда как при различных $\mathrm{Re}\lambda_j$ можно говорить только о "многопериодичности".

Для того чтобы выявить структуру стационарных решений при $N>2$ рассмотрим подробнее простейшее, отличное от (3) и (4) решение, соответствующее $N = 3$. При выполнении условия (8) и при параметрах $\lambda_j$, $m_j$ удовлетворяющих (6) и (7) трехсолитонное решение может быть преобразовано из выражения (5) к следующему явному виду:

$$u^{(3)}(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left\{\exp\left[a(x-x_0)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\omega\,\mathrm{ch}\left[b(x-x_1-x_b)\right]+\exp\left[-a(x-x_0)\right]\sin\omega t}{\omega\,\mathrm{ch}\left[b(x-x_1)\right]+\exp\left[a(x-x_0)\right]\sin\omega t}\right\}, \qquad (9)$$

где $x_b = b^{-1}\ln(a+b)/(a-b)$, $\omega = \pm\sqrt{1-b^2}$, $a = \pm 1$, $0<|b|<1$, $x_0$, $x_1$ – произвольные константы. Это решение сводится к почти линейной комбинации простого и двойного солитонов, когда расстояние между последними превышает их размеры. Действительно, в случае $|x_0 - x_1| > |a|^{-1}, |b|^{-1}$ формула (9) переходит в

$$u^{(3)}(x,t) \cong 4\,\mathrm{arctg}\,\exp\left\{a(x-x_0)\right\} +$$
$$+\,4\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{b\sin\omega t}{\omega\,\mathrm{ch}\left[b(x-x_1)\right]}\right\}, \qquad (10)$$

то есть простой солитон – "стенка" локализован в окрестности $x\sim x_0$, а двойной солитон – "пульсон" в окрестности $x\sim x_1$.

Солитонные решения уравнения (I) образуют сохраняющуюся во времени величину

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} H\,dx, \quad \text{где } H = (u_x^2 + u_t^2)/2 + (1-\cos u),$$

которую естественно называть энергией солитона, потому что H связана с функцией L соотношением

$$H = L - u_t \partial L/\partial u_t,$$

а $L$ является лагранжианом, приводящим к уравнению (I). Для вычисления энергии солитонов удобно воспользоваться методом, изложенным в работе /8/. Энергии простого и двойного солитонов получаются равными $E_I = 8$, $E_2 = 16\sqrt{1-\omega^2}$. Далее оказывается, что энергия 3-солитона точно равна $E_3 = 8 + 16\sqrt{1-\omega^2}$, то есть сумме энергий "стенки" и "пульсона". Это замечательно тем, что хотя 3-солитонное решение нелинейного уравнения (I), естественно, не есть линейная суперпозиция I- и 2-солитонных решений, энергия его равна точно сумме энергий этих решений.

До сих пор мы рассматривали 3-солитон в его собственной системе отсчета, где он является строго периодическим и составляющие его "стенка" и "пульсон" покоятся. Однако, так как Sine-Gordon уравнение инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца

$$x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2}, \quad t' = (t - vx)/\sqrt{1 - v^2},$$

то преобразование переменных в решении (IO) дает комбинацию "стенки" и "пульсона", бегущих в новой системе отсчета со скоростью $v$. При этом расстояние между ними по-прежнему постоянное, не зависящее от времени, хотя и изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой.

Так как условие (8) носит общий характер, то есть при любом $N$ приводит к стационарности решения (5), то утверждения, сделанные выше относительно решения (5) для $N = 3$, при выполнении этого условия можно распространять и на случай любого другого $N > 3$.

Итак, мы показали, что Sine-Gordon уравнение имеет сколь угодно много стационарных мультисолитонных решений, сохраняющих свою форму во времени. Такие мультисолитоны представляют собой почти линейные комбинации простых и двойных солитонов, когда расстояние между последними больше их размеров, причем эти расстояния постоянны, не зависят от времени, а только меняются при переходе к другим системам отсчета, в которых солитоны движутся с одинаковыми скоростями, сохраняя, таким образом, расстояние между собой. Энергия мультисолитонов равна точно сумме энергий слагающих их "стенок" и "пульсонов".

В заключение автор выражает благодарность В. П. Силину за руководство работой и В. М. Елеонскому за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
3 октября I979 г.

## Литература


1. В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Докл. АН СССР, 219, 1334 (1974).
2. G. L. Lamb jr., Phys. Lett., 25A, 181 (1967).
3. G. L. Lamb jr., Rev. Mod. Phys., 43, 99 (1971).
4. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, Phys. Rev. Lett., 30, 1262 (1973).
5. R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, Phys. Rev., 11D, 3424 (1975).
6. T. W. Barnard, Phys. Rev., 7A, 373 (1973).
7. R. Hirota, J. Phys. Soc. Jap., 33, 1459 (1972).
8. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, Nuovo Cim., 25B, 497 (1975).