Краткие сообщения по физике № 2 1978

ЛОСС-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

В. В. Додонов, В. И. Манько

УДК 530.145

Для квантовых систем, гамильтонианы которых инвариантны относительно сдвигов во времени на комплексную величину, введено понятие лосс-энергетических состояний. Рассмотрен пример квантового затухающего осциллятора.

Из-за несохранения энергии квантовые системы, обладающие нестационарными гамильтонианами, имеют ряд особенностей. К настоящему времени наиболее изученными являются два (пересекающихся) класса таких систем. К первому относятся системы с общими многомерными нестационарными квадратичными гамильтонианами и их многочисленные частные случаи /1/. Другим важным классом нестационарных систем являются системы с периодическими гамильтонианами, удовлетворяющими соотношению $\hat{H}(t + T) = \hat{H}(t)$, где T - действительное число /2-4/.

Мы хотим обратить внимание на то, что существует еще один важный класс квантовых (и классических) систем, гамильтонианы которых также обладают некоторым специальным свойством симметрии, а именно, инвариантны относительно комплексных сдвигов. Гамильтонианы с чисто мнимой пространственной периодичностью давно применяются в физике. Например, это хорошо известный потенциал Морзе $U(x) = U_0 [\exp(-2ax) - 2\exp(-ax)]$, а также ряд других (см., например, /5/). Решения уравнения Шредингера для всех потенциалов такого типа имеют вид $\psi(x) = \exp(\gamma x)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - некоторая периодическая с мнимым периодом функция. Эта факторизация является следствием симметрии гамильтониана, на которую ранее, однако, внимание не обращалось. В настоящей работе мы рассмотрим системы с нестационарными гамильтонианами, инвариантными относительно сдвига на мнимый период: $\hat{H}(t + iT) = \hat{H}(t)$, $\mathrm{Im}T = 0$. Для систем рассматриваемого типа можно построить решения уравнения Шредингера, обладающие следующим свойством:

$$\psi_\varepsilon(t + iT) = \exp(\varepsilon T)\psi_\varepsilon(t); \quad \mathrm{Im}T = 0. \tag{I}$$

Мы назовем такие состояния лосс-энергетическими (ЛЭС), а величину ε – лосс-энергией (ЛЭ), поскольку такие состояния являются состояниями квантовых систем с потерей энергии (см. ниже). Таким образом, лосс-энергетические состояния можно рассматривать как аналог блоховских состояний (при этом временная одномерная решетка является чисто мнимой), или как аналог квазиэнергетических состояний /2-4/. Однако эти состояния имеют ряд особенностей по сравнению с квазиэнергетическими. Главная причина отличий состоит в том, что многие свойства решений уравнения Шредингера существенно основываются на том, что время - вещественная величина, тогда как в основе концепции ЛЭС лежат сдвиги во времени на мнимую величину. Например, состояния с различными лосс-энергиями, вообще говоря, не ортогональны, тогда как состояния с различными квазиэнергиями всегда ортогональны /2/.

В качестве примера рассмотрим гамильтониан, впервые предложенный в работе /6/:

$$\hat{H}(t) = (1/2)\exp(-2\gamma t)\hat{p}^2 + (1/2)\omega^2\exp(2\gamma t)\hat{x}^2;$$
$$\hat{H}(t + i\pi/\gamma) = \hat{H}(t). \tag{2}$$

Легко проверить, что в классической механике этот гамильтониан приводит к уравнению движения затухающего гармонического осциллятора. Затухание в этой системе связано либо с изменением массы осциллятора по экспоненциальному закону, либо с наличием вязкого трения.

Уравнение Шредингера с гамильтонианом (2) имеет квадратичный интеграл движения, инвариантный относительно сдвига $t \to t + i\pi/\gamma$

$$\hat{K}(t) = \hat{H}(t) + (\gamma/2)(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}). \tag{3}$$

Лосс-энергетические состояния получаются, если в качестве решений уравнения Шредингера выбрать собственные функции этого интеграла движения. Приведем явный вид ЛЭС в случае апериодического затухания $\omega < \gamma$ ($D_\lambda(z)$ – функции параболического цилиндра)

$$\varphi_\nu^{(\pm)}(x;t) = \exp\left[-(i\gamma/2)\exp(2\gamma t)x^2 + (\gamma t/2) - i\nu\tilde{\Omega}t\right]\times$$

$$\times\left[D_{i\nu-1/2}(x\sqrt{2\tilde{\Omega}}\exp[\gamma t - i\pi/4]) \pm D_{i\nu-1/2}(-x\sqrt{2\tilde{\Omega}}\exp[\gamma t - i\pi/4])\right];$$

$$\hat{K}\varphi_\nu^{(\pm)} = \nu\tilde{\Omega}\varphi_\nu^{(\pm)};\quad \tilde{\Omega} = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2};\qquad -\infty < \nu < \infty; \tag{4}$$

$$\varphi_\nu^{(\pm)}(x;\ t + i\pi/\gamma) = \varphi_\nu^{(\pm)}(x;t)\exp(\nu\tilde{\Omega}\pi/\gamma \pm i\pi/2).$$

Таким образом, спектр лосс-энергий непрерывный, причем он состоит из двух ветвей: $\varepsilon_\nu^{(\pm)} = \nu\tilde{\Omega} \pm i\gamma/2$. Существенно, что ЛЭ комплексны, причем их мнимая часть связана с коэффициентом затухания. Поскольку оператор $\hat{K}(t)$ эрмитов, то функции (4) образуют полную систему, причем состояния с различными ν ортогональны. В случае $\omega > \gamma$ спектр ЛЭ дискретный: $\varepsilon_n = (n + 1/2)(\Omega + i\gamma)$, $n = 0,1,2,\ldots$, $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, а сами ЛЭС выражаются через полиномы Эрмита (в этом случае решения уравнения Шредингера в виде полиномов Эрмита рассматривались также в работах /7,8/, однако, на их связь с симметрией гамильтониана внимания не обращалось). В случае критического затухания, $\omega = \gamma$ ЛЭС также образуют полную ортогональную систему и выражаются просто через экспоненты от некоторых квадратичных по x выражений, а спектр ЛЭ имеет вид $\varepsilon_\rho = (1/2)(\rho + i\gamma)$, причем собственные значения оператора $\hat{K}(t)$ равны $\rho/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$. В этих трех случаях единственным независимым оператором, инвариантным относительно сдвига $t \to t + i\pi/\gamma$, оказывается оператор $\hat{K}(t)$. Если же $\omega = 0$ (свободное движение с затуханием), то все интегралы движения инвариантны относительно указанного сдвига, поскольку все они могут быть выражены через два независимых линейных интеграла движения $\hat{I}_1 = \hat{p}$; $\hat{I}_2 = \hat{p}\exp(-2\gamma t) + 2\gamma\hat{x}$. Поэтому в случае $\omega = 0$ существует множество различных полных ортогональных систем лосс-энергетических состояний, так что состояния с различными лосс-энергиями оказываются, вообще говоря, не ортогональными. Более того, спектр ЛЭ в этом случае состоит как из различных непрерывных ветвей, так и дискретных бесконечнократно вырожденных точек /9/.

Теоретико-групповая причина указанных особенностей ЛЭС заключается в использовании неунитарных представлений группы трансляций в отличие от обычно используемых унитарных представлений.

В качестве других систем, при изучении которых может быть полезной концепция ЛЭС, укажем уравнения Шредингера с многомерными гамильтонианами типа (I), включая неэрмитовый случай, когда $\hat{H}(t + T_1 + iT_2) = \hat{H}(t)$, а также уравнения Клейна-Гордона, Дирака или Шредингера во внешних электромагнитных полях вида $\vec{E}_0 \mathrm{ch}^{-2}(\alpha t)$ (такие поля рассматривались, например, в /I0/, однако, инвариантность уравнений относительно сдвигов $t \to t + i\pi/\alpha$ не обсуждалась).

Авторы благодарны В. И. Ритусу за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
I0 ноября I977 г.

Литература

I. В. В. Додонов, И. А. Малкин, В. И. Манько, ТМФ, 24, I64 (I975); I6, 357 (I977).
2. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 5I, I492 (I966); УФН, II0, I39 (I973).
3. В. И. Ритус, ЖЭТФ, 5I, I544 (I966).
4. И. А. Малкин, В. И. Манько, А. П. Шустов, Препринт ФИАН № I69, I975 г.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГИФМЛ, М., I963 г., задачи к §§ 23, 25.
6. P. Caldirola, Nuovo Cimento, 18, 393 (1941).
7. E. H. Kerner, Canadian J. Physics, 36, 371 (1958).
8. R. W. Hasse, J. Math. Phys., 16, 2005 (1975).
9. В. В. Додонов, В. И. Манько, Препринты ФИАН № I64, I86, I977 г.
I0. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ЯФ, II, I072 (I970).