Краткие сообщения по физике № 5 1978

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ

В. К. Потехин, Л. А. Шелепин

УДК 519.217; 519.4; 535.51

Предложен теоретико-групповой подход в исследовании статистики излучения. Обсуждаются возможности использования, естественным образом получаемых на сфере Пуанкаре, статистических распределений для анализа структуры поля.

В различных разделах современной оптики широко используются методы теории групп. Несомненный интерес представляет возможность применения этих методов для круга задач, связанных с исследованием статистики излучения. При классическом описании оптического поля объектами, подчиняющимися статистическим закономерностям, являются начальная фаза, длительность цуга излучения, его интенсивность и поляризационное состояние.

В предлагаемой работе рассматриваются преимущественно вопросы корреляции компонент поляризации светового поля. На основе теоретико-группового подхода строится функция распределения на сфере Пуанкаре от наблюдаемых параметров Стокса. Это функция распределения может быть применена для обнаружения корреляции временной последовательности цугов излучения, а в случае эргодического излучения для обнаружения корреляций по ансамблю цугов. С помощью полученной функции распределения можно определить понятие энтропии поляризации излучения, заменяющей более адекватным образом понятие степени поляризации оптического поля.

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, представленную комплексной записью

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 A_1 \exp(i\omega t + i\varphi_1),$$
$$\vec{E}_2 = \vec{e}_2 A_2 \exp(i\omega t + i\varphi_2), \qquad (I)$$

где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ два ортонормированных вектора, связанные с волной в плоскости перпендикулярной направлению распространения $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1\vec{e}_2]$. Состояние плоской однородной волны задается амплитудами A_I и A_2 и разностью фаз $\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. Множество всевозможных состояний волны определяет пространство С(2), группой преобразований которого при фиксированном значении энергии и меры выделенного объема является группа SU(2). С волной (I) можно связать матрицу поляризационной когерентности, имеющую инвариантные относительно SU(2) характеристики SpJ и DetJ = 0.

Запишем эту матрицу в ковариантном виде (по группе вращения лабораторной системы координат):

$$J = \begin{pmatrix} (\vec{E}_1\vec{E}_1^+) & ([\vec{E}_1\vec{E}_2^+]\vec{e}_3) \\ -([\vec{E}_2\vec{E}_1^+]\vec{e}_3) & (\vec{E}_2\vec{E}_2^+) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Отметим, что ковариантное описание (на языке тензоров корреляции) было предложено Солейлем /I/, детально разработано и использовано Федоровым /2/.

Матрица когерентности (2) может быть связана с непосредственно наблюдаемыми параметрами S_0, S_1, S_2, S_3, введенными Стоксом и идентифицирующими интенсивность S_0 и поляризационное состояние (S_1, S_2, S_3) через разложение на базисе единичной матрицы и матриц Паули /3/:

$$J = (1/2)(S_0\vec{\sigma}_0 + S_1\vec{\sigma}_1 + S_2\vec{\sigma}_2 + S_3\vec{\sigma}_3). \tag{3}$$

В представлении (3) состояние световой волны задается точкой на сфере Пуанкаре радиуса S_0, а изменение поляризационного состояния волны движением конца вектора Стокса $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ по сфере.

Рассмотрим простейшую статистическую модель источника света /4/: временную последовательность цугов длительностью τ и постоянной интенсивности S_0. Переход от одного цуга к другому обусловлен действием некоторого оператора O_g группы вращений, ассоциированной с группой SU(2) преобразований пространства состояний плоской электромагнитной волны. Множество операторов перехода в этой последовательности индуцирует плотность вероятности $p(g)$ индивидуального преобразования вектора Стокса, зависящую в общем случае от начальной ориентации Ω_0.

Решение задачи о случайных поворотных блужданиях вектора Стокса (в предположении независимости плотности вероятности индивидуального поворота от Ω) может быть записано в форме Валиева-Иванова /5/

$$P(\Omega,N) = \sum_l \frac{2l+1}{8\pi^2} \mathrm{Sp}\left\{T^l(\Omega_o^{-1})(A^l)^N T^l(\Omega)\right\}, \tag{4}$$

где $T^l(\Omega)$ – матрица представления группы $SU(2)$, $P(\Omega, N)$ – плотность вероятности состояния Ω после N-ного перехода, а

$$A^l = \int_G p(g)T^l(g^{-1})dg. \tag{5}$$

Если закон распределения моментов времени, в которые вектор Стокса переходит из одного состояния в другое, задается случайным пуассоновским потоком, а момент перехода отождествляется с осуществлением события из этого потока, то плотность вероятности $W(\Omega,t)$ поляризационного состояния Ω в момент t при условии, что в момент $t = 0$ вектор Стокса задавал состояние Ω_o, в предположении постоянства интенсивности пуассоновского события на сфере Пуанкаре, определяется соотношением:

$$W(\Omega,t) = \sum_l \frac{2l+1}{8\pi^2} \mathrm{Sp}\left\{T^l(\Omega_o^{-1})\exp\left[-\frac{t}{\tau}(1 - A^l)\right]T^l(\Omega)\right\}. \tag{6}$$

Разброс по абсолютному значению вектора Стокса учитывается введением множителя $W(S_o)$, представляющего плотность функции радиального распределения, в формулу (6). Финальная функция радиального распределения для модели разделенных во времени цугов произвольной интенсивности может быть найдена непосредственно из решения уравнения Колмогорова-Чепмена и имеет вид

$$W_\Phi(S_o) = \frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\delta(S_o) + \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}Q(S_o), \tag{7}$$

где $\lambda = \lambda(S_o) \neq \lambda(\Omega,t)$ – интенсивность процесса обрыва цуга излучения, α – интенсивность появления цугов, а $Q(S_o) \equiv Q(0,S_o)$ – условное распределение вероятности появление цугов энергии S_o. Вероятность $W(\Omega,t)d\Omega$ для достаточно больших времен t слабо зависит от Ω_o. Зависимость плотности вероятности от Ω_o для малых времен задает временную корреляцию в источнике. Отметим, что, если при $t \to \infty$ статистическая функция равнораспределена на сфере Пуанкаре, то излучение является полностью неполяризованным. Полностью поляризованное излучение задается некоторой δ-функцией.

Данный подход может быть применен и к лучу света, то есть стохастической смеси некогерентных между собой цугов. В этом случае, если отвлечься от эффектов, связанных с распределением по значениям абсолютной фазы, для плотности поляризационного состояния Ω в момент t имеем:

$$W(\Omega,t) = \sum_{l,m,n} \frac{2l+1}{8\pi^2} T^l_{nm}(\Omega_o^{-1}) T^l_{mn}(\Omega) \times$$

$$\times \exp\left\{-\left[D^+ l(l+1) + (D^3 - D^+)m^2\right]t\right\}, \qquad (8)$$

где $D^{\pm} = (1/2)(D^1 \pm D^2)$, а D^i $(i = 1,2,3)$ – собственные значения тензора поляризационной стохастичности $D_{ij} \equiv (1/2\tau)\int \varepsilon_i \varepsilon_j \times$ $\times D(\vec{\varepsilon})d^3\varepsilon$, введенного по аналогии с тензором диффузии, а $\vec{\varepsilon}$ – вектор поворота поляризационного состояния.

Получение функции распределения поляризационных состояний на сфере Пуанкаре дает возможность определения энтропии поляризации излучения

$$H = -\int P(\Omega)\log P(\Omega)d\Omega. \qquad (9)$$

Если матрицу когерентности можно представить в виде разложения двух матриц, описывающих полностью поляризованное $P_{пол}(\Omega)$ и неполяризованное излучение $P_{неп}(\Omega)$ и учитывая, что $P_{пол}(\Omega) = P_{пол}\delta(\Omega - \Omega_o)$, $P_{неп}(\Omega) = P_{неп}$, причем, $\int(P_{пол} + P_{неп})d\Omega = 1$, то энтропия поляризации излучения равна

$$H = -4\pi P_{неп}\log P_{неп} - P_{пол}\log P_{пол}. \qquad (10)$$

Связь (10) с подходом к энтропии на основе собственных значений матрицы когерентности, принятым в литературе /3/ очевидна. В общем случае однако, построенная функция распределения не представима в виде суммы двух распределений, соответствующих полностью поляризованному и неполяризованному волновому полю. В этом смысле энтропия, вводимая по формуле (9), более адекватна действительности и может служить более точным определением степени поляризации квазимонохроматического излучения.

Информация о статистических поляризационных свойствах поля излучения содержится в величине $p(g)$ (формулы (4), (5)), тесно связанной с трехмерной функцией распределения цугов по состояниям поляризаций. Вопрос об экспериментальных методах нахождения этой функции обсуждался Розенбергом /6/. На основе развитого подхода по измерению конечного распределения (6), решая обратную задачу, можно найти $p(g)$. В принципе теоретико-групповой анализ может быть применен и для нахождения других характеристик структуры поля излучения.

Поступила в редакцию
10 апреля 1978 г.

Литература

1. P. Soleillet, Ann. de Phys., 12, 23 (1929).
2. Ф. И. Федоров, Теория гиротропии, "Наука и техника", Минск, 1976 г.
3. О'Нейл, Введение в статистическую оптику, "Мир", М., 1966 г.
4. Г. С. Горелик, Колебания и волны, ГИТТЛ, М.Л., 1950 г.
5. К. А. Валиев, Е. Н. Иванов, УФН, 109, 31 (1973).
6. Г. В. Розенберг, УФН, 121, 97 (1977).