

УДК 533.9

## ДИНАМИКА МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ДВУХ ВОЛН

С. А. Майоров

*В работе на основе численного моделирования получены характеристики вынужденных колебаний частицы в поле двух плоских волн. Рассмотрен случай малых колебаний захваченных волной частиц – колебаний частиц в потенциальной яме вблизи ее дна под воздействием слабого поля плоской волны. Исследованы зависимости количественных характеристик колебаний (амплитуда, дисперсия отклонения, средняя энергия) от параметров плоской волны и прослежена связь с характером колебаний (регулярным или стохастическим) на основе вычисленного показателя Ляпунова для скорости разбегания первоначально близких фазовых траекторий.*

Регулярная и стохастическая динамика частиц в волновых полях являлась объектом многих численных и теоретических исследований (см., например, книги [1, 2]). В настоящей работе, продолжающей работы по численному моделированию динамических систем [3 – 5], на основе вычислительного эксперимента исследовано возникновение стохастичности при малых колебаниях частицы в поле двух плоских волн. Основное внимание уделено исследованию стохастичности и анализу характеристик траекторий.

Движение частицы в суперпозиции полей  $N$  плоских волн описывается уравнением

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} \sum_{i=1}^N E_i \sin(k_i x - \omega_i t). \quad (1)$$

Рассмотрим случай двух волн. Выбирая систему координат, движущуюся с фазовой скоростью первой волны  $V_1 = -\omega_1/k_1$ , используя в качестве единиц длины  $1/k_1$ ,

а единиц времени – обратную частоту малых колебаний в поле первой волны  $1/\Omega_1$ , где  $\Omega_1^2 = \frac{e}{m} E_1 k_1$ , получаем следующее уравнение для движения в поле двух волн:

$$\ddot{x} + \sin x = -E \sin(kx - \omega t). \quad (2)$$

То есть за счет выбора системы координат и размерностей длины и времени, в уравнении (1) можно положить  $\omega_1 = 0$ ,  $e = m = E_1 = k_1 = 1$ . Здесь в (2) и далее при обозначении частоты, волнового вектора и амплитуды поля второй волны нижний индекс 2 будем опускать.

Уравнение (2) при  $k = 0$  описывает движение маятника под воздействием периодической внешней силы (при замене координаты  $x$  на  $\varphi$  – угол отклонения от нижней точки равновесия):

$$\ddot{x} + \sin x = E \sin \omega t. \quad (3)$$

Этот случай хорошо изучен и является классическим примером проявления стохастичности в простейшей динамической системе. Стохастичность обусловлена особенностью в точке, разделяющей финитное движение (колебания маятника) и инфинитное (вращение маятника). Траектория частицы в фазовом пространстве, проходящая через эту точку, является сепаратрисой, разделяющей области финитного и инфинитного движения. Стохастичность движения проявляется для траекторий частиц, близких к сепаратрисе.

Мы будем рассматривать другой случай – малые колебания частицы в потенциальной яме вблизи ее дна под воздействием слабого поля плоской волны:  $k \neq 0$ ,  $E \ll 1$ ,  $x(0) \ll 1$ ,  $\dot{x}(0) \ll 1$ . Отметим, что уравнение (2) в этом случае не описывает задачу о возмущении нелинейного маятника плоской волной, поскольку плоская волна  $E(x, t) = E \sin(kx - \omega t)$  при замене переменной  $x$  на угол  $\varphi$ :  $x = L \sin \varphi$ , в переменных угол–время имеет вид  $E(\varphi, t) = E \sin(kL \sin \varphi - \omega t)$ , где  $L$  – длина маятника.

В рассматриваемом случае малых колебаний частицы  $|x(t)| \ll 1$ , и синус в уравнении (2) может быть приближен линейной функцией, тогда получаем следующее уравнение для линейного осциллятора в поле плоской волны

$$\ddot{x} + x = -E \sin(kx - \omega t). \quad (4)$$

При  $k = 0$  оно является линейным и описывает возмущение линейного осциллятора гармонической силой

$$\ddot{x} + x = E \sin \omega t. \quad (5)$$

Это уравнение имеет решение в виде суперпозиции колебаний с собственной частотой и частотой внешней силы:

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + \frac{E}{1 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (6)$$

где константы определяются через начальные условия:  $c_1 = \dot{x}(0) - E\omega/(1 - \omega^2)$ ,  $c_2 = x(0)$ . Для нулевых начальных условий:  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , решение уравнения (5) имеет вид:

$$x(t) = \frac{E}{1 - \omega^2} (\sin \omega t - \omega \sin t). \quad (7)$$

Скорость частицы в этом случае равна

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega E}{1 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos t). \quad (8)$$

Отсюда получаем для амплитуды, дисперсии и средней кинетической энергии колебаний линейного осциллятора (5) следующие зависимости от частоты и амплитуды внешней силы:

$$A = \max x(t) = -\min x(t) = E/|1 - \omega|, \quad (9)$$

$$\sigma^2 = \langle x^2(t) \rangle = E^2(1 + \omega^2)/2(1 - \omega^2)^2, \quad (10)$$

$$\langle K \rangle = \langle \dot{x}^2(t) \rangle / 2 = \omega^2 E^2 / 2(1 - \omega^2)^2. \quad (11)$$

Отметим, что как фазовые траектории (7), (8), так и средние по времени характеристики (9) – (11) устойчивы по отношению к возмущению начальных данных, соответственно, показатель Ляпунова для таких колебаний линейного осциллятора равен нулю.

Методика вычисления средних характеристик колебаний частиц и показателя Ляпунова для скорости разбегания первоначально близких траекторий состояла в том, что при заданных значениях частоты и длины плоской волны вычислялись траектории 100 пробных частиц, занимающих в начальный момент времени малый фазовый объем вблизи точки равновесия  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ . Для частиц с нечетными номерами начальные условия были следующими:  $x_{2n-1}(0) = \dot{x}_{2n-1}(0) = 10^{-8} n$ , а для частиц с четными номерами начальные условия получались путем предельно малой для численного эксперимента вариации:  $x_{2n}(0) = x_{2n-1}(0) + 10^{-14}$ ,  $\dot{x}_{2n}(0) = \dot{x}_{2n-1}(0) + 10^{-14}$ . Таким способом в фазовом пространстве выбирался маленький начальный объем, а очень маленькая вариация начальных значений обеспечивала достаточную надежность в определении

показателя Ляпунова. Для этого вычислялась функция  $d(t)$ -зависимости от времени среднего расстояния в фазовом пространстве между четными и нечетными частицами:

$$d^2(t) = \frac{1}{50} \sum_{n=1}^{50} [x_{2n}(t) - x_{2n-1}(t)]^2 + [\dot{x}_{2n}(t) - \dot{x}_{2n-1}(t)]^2. \quad (12)$$

Показатель Ляпунова  $\sigma_1$  вычислялся на основе анализа скорости расхождения траекторий на начальном этапе, когда расстояние между ними еще мало. В соответствии с определением показатель Ляпунова определяет скорость экспоненциально быстрого роста расстояния между первоначально близкими фазовыми траекториями (см., например, [2]):

$$\sigma_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)}.$$

При численном интегрировании невозможно использовать бесконечный предел как по чисто технической причине конечности числа возможных для расчета арифметических операций, так и из-за ограниченности фазового объема, в котором может находиться частица. Поэтому вместо бесконечного предела выбирался достаточно большой промежуток времени, в течение которого расстояние между траекториями значительно увеличивалось, но еще не достигало предельного значения.

Для численного интегрирования использовалась схема Рунге-Кутты 4-го порядка точности с шагом интегрирования по времени  $\tau = 0.001$ , что при данных параметрах задачи и выполнении расчетов с двойной точностью (14 десятичных знаков) обеспечивало погрешность порядка  $10^{-14}$  для длины временного интервала  $t_0 = 1000$ .

Все представленные результаты расчетов соответствуют случаю малых колебаний частицы в потенциальной яме вблизи ее дна под воздействием слабого поля плоской волны  $E = 0.1$ , при малом отклонении начальных значений координаты и скорости от нуля  $0 < x(0) \ll 1$ ,  $0 < \dot{x} \ll 1$ . Длина второй волны выбиралась много меньше длины первой волны, т.е. много меньше размера потенциальной ямы  $2\pi$ .

На рис. 1 представлены результаты расчетов характеристик малых колебаний частицы в потенциальной яме вблизи ее дна под воздействием слабого поля плоской волны  $E = 0.1$ , при малом отклонении начальных значений координаты и скорости от нуля. На графиках приведены зависимости от частоты второй волны  $\omega$  при фиксированном значении волнового вектора  $k = 20$ : а) показатель Ляпунова; б) амплитуда колебаний; в) средняя по времени кинетическая энергия частицы; г) дисперсия колебаний – среднее квадратичное отклонение от нуля. Сплошные кривые на всех графиках – соответствующие



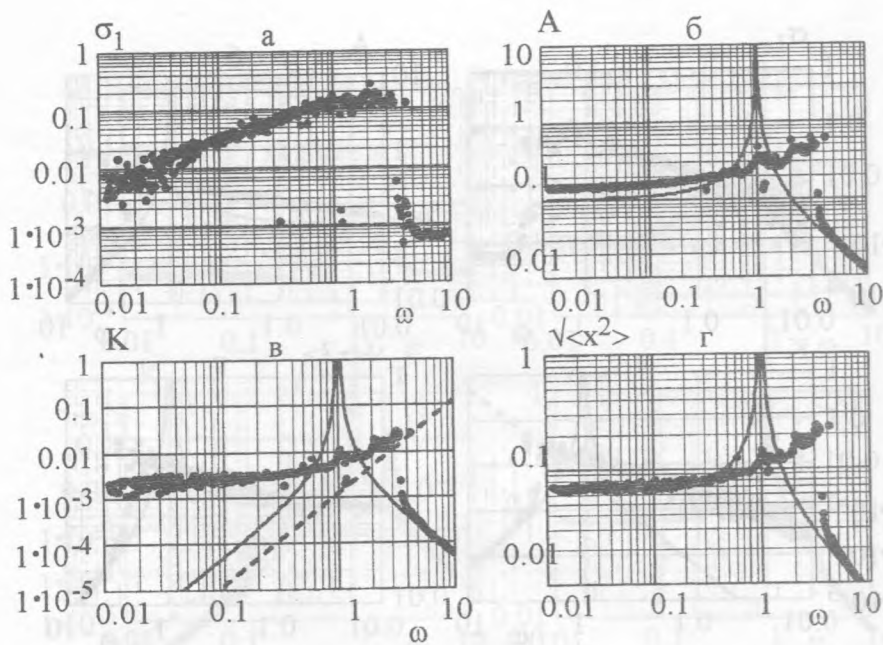


Рис. 1. Результаты расчетов характеристик малых колебаний частицы в потенциальной яме вблизи ее дна под воздействием слабого поля плоской волны:  $E = 0.1$ ,  $x(0) \ll 1$ ,  $\dot{x}(0) \ll 1$ . Приведены зависимости от частоты второй волны  $\omega$  при фиксированном значении волнового вектора  $k = 5$ : а) показатель Ляпунова; б) амплитуда колебаний; в) средняя кинетическая энергия частицы; г) среднеквадратичное отклонение частицы. Сплошные кривые – соответствующие характеристики линейного осциллятора при  $k = 0$ , для графика кинетической энергии приведена также кинетическая энергия частицы, скорость которой равна скорости волны – штрихованная кривая.

характеристики линейного осциллятора при  $k = 0$ . Для графика кинетической энергии приведена также кинетическая энергия частицы, скорость которой равна скорости волны – штрихованная прямая.

На рис. 2 и 3 представлены аналогичные графики для расчетов при  $k = 10$  и  $k = 20$  соответственно.

На рис. 4а представлены графики  $d(t)$ -зависимости от времени среднего расстояния между частицами в фазовом пространстве (12) при  $k = 20$  для различных значений частоты:  $\omega = 0.1, 1.15, 1 + \pi/20, 1.16, 1.17, 2$ . Первая кривая  $\omega = 0.1$  демонстрирует наиболее сложное поведение – участок регулярного движения сменяется нерегулярным и наоборот. Три следующие кривые  $\omega = 1.15, 1 + \pi/20 \approx 1.57, 1.16$  демонстрируют незна-

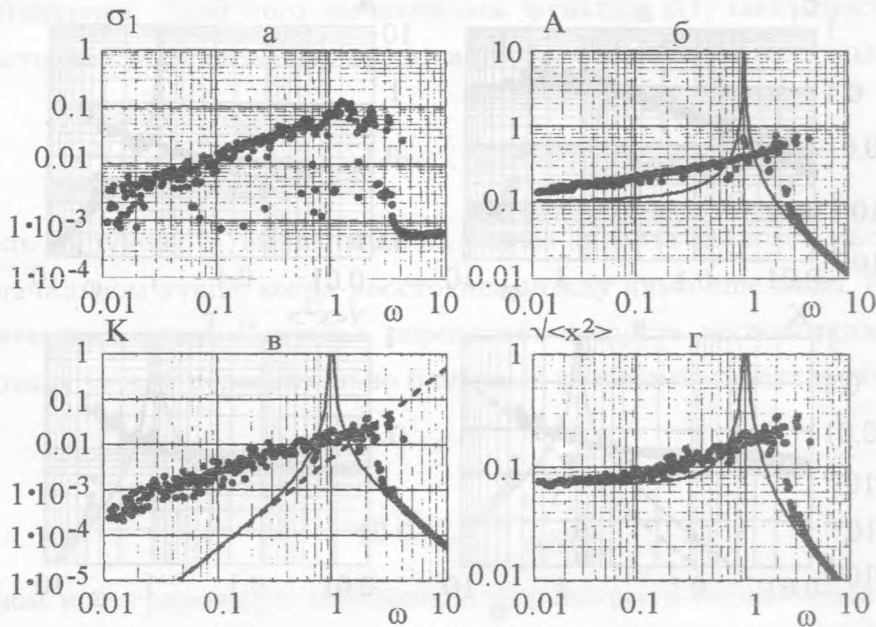


Рис. 2. Результаты аналогичных расчетов при  $k = 10$ .

чительное увеличение расстояния между близкими точками из-за ошибок вычисления (регулярное движение). Две следующих кривые  $\omega = 1.17, 2$  показывают экспоненциальный характер разбегания близких траекторий – стохастическое движение с показателем Ляпунова  $\sigma_1 \approx 0.2$ . Определяемое программой минимальное значение  $\sigma_1 \approx 0.001$  соответствует погрешности определения нулевого значения показателя Ляпунова. На рис. 4(б, в) в качестве примера приведены два фазовых портрета (траектории частиц в фазовом пространстве) при  $k = 20$  для двух близких значений частоты:  $\omega = 1.15$  – регулярное движение;  $\omega = 1.17$  – стохастическое движение.

На рис. 5 представлены графики, демонстрирующие возникновение стохастических колебаний при воздействии на частицу плоской волны с параметрами:  $E = 0.1, k = 20, \omega = 0.1$ . На всех графиках приведены зависимости от времени, которое нормировано на период колебаний второй волны  $T = 2\pi/k = 10\pi$ .

На рис. 5а представлены графики зависимости от времени смещения (координаты) частицы. Дополнительно также нарисован жирной кривой график (7):  $x(t) = 0.099(\sin 0.1t - 0.1 \sin t)$  – смещение частицы при  $k = 0$ , а штриховая прямая обозначает движение со скоростью волны  $x(t) - tk/\omega = 0.05t$ .

На рис. 5б представлены графики зависимости от времени скорости частицы. До-

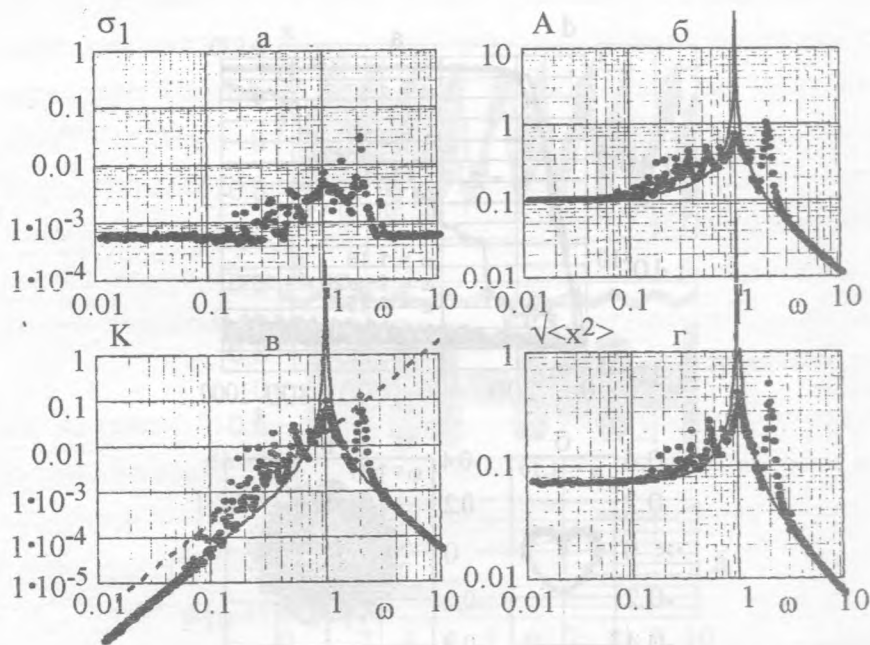


Рис. 3. Результаты аналогичных расчетов при  $k = 20$ .

полнительно сверху также нарисован жирной кривой график (8):  $\dot{x}(t) + 0.2 = 0.2 + 0.0099(\cos 0.1t - \cos t)$  – скорость частицы при  $k = 0$ , для удобства представления увеличенная на 0.2.

На рис. 5в представлена соответствующая зависимость от времени среднего расстояния между частицами в фазовом пространстве (12) – она приведена уже на рис. 4а.

Приведенные результаты расчетов показывают, что и для малых колебаний частицы в поле двух плоских волн имеется область стохастического движения. Ее появление не связано с прохождением частицы через сепаратрису, разделяющую фазовую плоскость на области свободного и ограниченного движения. Возникновение стохастичности малых колебаний связано со структурой бегущей волны, а не с нелинейностью маятника. Это прямо демонстрируют расчеты, в которых регулярность или стохастичность движения сохранялась при выполнении расчетов с соответствующей линейризацией – заменой уравнения (2) на (4).

Как показывают расчеты, для возникновения стохастичности малых колебаний необходимо выполнение двух условий: 1) амплитуда колебаний должна быть больше длины второй волны; 2) максимальная скорость частиц должна быть выше скорости волны.

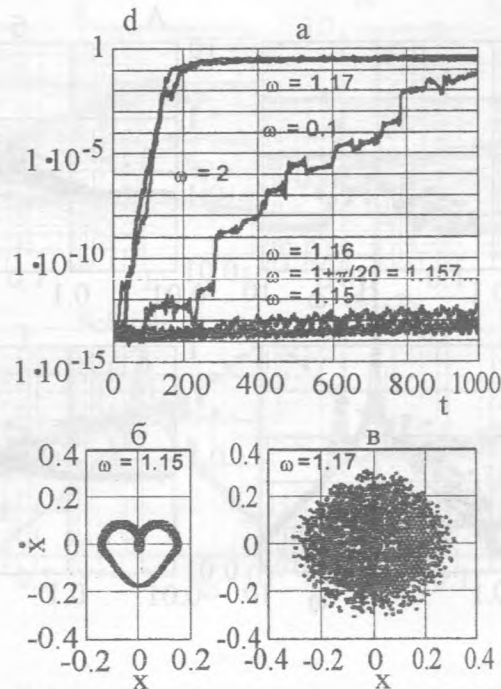


Рис. 4. а) функции  $d(t)$ -зависимости от времени среднего расстояния в фазовом пространстве между первоначально близкими частицами при  $k = 20$  для различных значений частоты второй волны:  $\omega = 0.1$  – участок регулярного движения сменяется нерегулярным и наоборот;  $\omega = 1.15, 1 + \pi/20 \approx 1.57, 1.16$  – незначительное увеличение расстояния между близкими точками из-за ошибок вычисления (регулярное движение);  $\omega = 1.17, 2$  – экспоненциальный характер разбегания близких траекторий (стохастическое движение); б, в) фазовые портреты для частоты:  $\omega = 1.15$  – регулярное движение (б);  $\omega = 1.17$  – стохастическое движение (в).

При выполнении этих условий появляется вероятность резонансного взаимодействия частиц с бегущей волной. Для оценок амплитуды и скорости колебаний возьмем значения для вынужденных осцилляций в линейном пределе при нулевых начальных условиях (7), (8) и тогда получаем:

$$kE/|1 - \omega| > 1, \tag{13}$$

$$2kE/|1 - \omega^2| > 1. \tag{14}$$

Отсюда следует, что вблизи резонанса при  $\omega = 1$  всегда возможно стохастическое



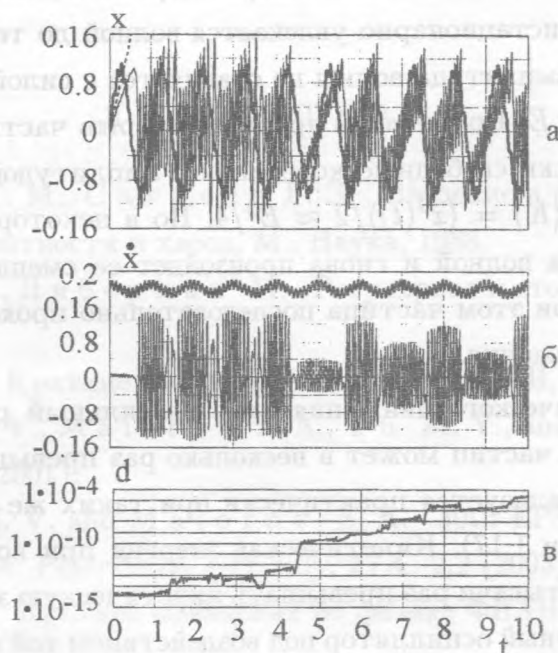


Рис. 5. Расчет колебаний частицы при воздействии на нее плоской волны с параметрами:  $E = 0.1, k = 20, \omega = 0.1$ . На всех графиках время нормировано на период колебаний второй волны. а) Зависимость от времени смещения (координаты) частицы. Жирная кривая обозначает график функции (7) – смещение частицы при  $k = 0$ , штриховая прямая – движение со скоростью волны; б) Зависимость от времени скорости частицы. Жирная кривая сверху изображает функцию (8) – скорость частицы при  $k = 0$  – для удобства представления увеличенную на величину 0.2; в) Зависимость от времени среднего расстояния между частицами в фазовом пространстве, вычисленная по формуле (12).

движение, при увеличении частоты оценкой границы стохастического движения является частота  $\omega = \sqrt{1 + 2kE}$ , что расчетные данные и подтверждают. Для малых частот движение имеет сильно выраженный стохастический характер в случае, если  $kE > 1$ , что полностью согласуется с результатами расчетов – при  $k = 5$  стохастический характер движения при низких частотах пропадает.

Для малых частот  $\omega \ll 1$  при стохастическом движении амплитуда колебаний частицы превышает амплитуду соответствующих линейных колебаний (9) примерно в полтора раза, но средняя кинетическая энергия радикально отличается от значений (11) в большую сторону. При  $k = 20$  (случай сильно выраженной стохастичности при малых частотах), кинетическая энергия практически не зависит от частоты (см. рис.

1в). Характер колебаний и механизм набора энергии в этом случае проясняет рис. 5. Вначале частица квазистационарно увлекается волной до тех пор, пока при некоторой координате частицы амплитуда волны не сравняется с силой удержания частицы в потенциальной яме:  $x \approx E$ . После этого происходит срыв частицы с гребня волны, далее происходят практически свободные колебания с амплитудой  $|x(t)| \leq E$  и средней кинетической энергией  $\langle K \rangle = \langle \dot{x}^2(t) \rangle / 2 \approx E^2/4$ . Но в некоторый момент частица опять может быть захвачена волной и снова произойдет ее смещение на величину порядка амплитуды волны. При этом частица последовательно проходит периоды регулярного и стохастического движения.

В случае стохастического движения имеется сильный разогрев частиц – средняя кинетическая энергия частиц может в несколько раз превышать энергию регулярного движения, которое реализуется практически при таких же параметрах второй волны (например,  $\omega = 1.16$  и  $1.17$ ). Кинетическая энергия при воздействии бегущей волны может в сотни и даже тысячи раз превышать кинетическую энергию, которую набирает линейный или нелинейный осциллятор под воздействием той же волны с  $k = 0$ . Особенно сильно этот эффект проявляется для низких частот.

Стохастический нагрев – весьма общее свойство многих нелинейных динамических систем, классическим примером которого является ускорение Ферми. Отметим, что во многих экспериментальных работах отмечается аномально высокая энергия левитирующих в плазме пылинок, но удовлетворительного теоретического объяснения этому эффекту пока нет [6].

Параметры осцилляций (амплитуда, средняя энергия, дисперсия) сильно зависят от стохастичности движения, которая может наступать или пропадать при незначительном изменении частоты или длины волны. В области стохастичности существуют островки регулярности, наличие которых не связано с рациональностью отношения частот волн, что показывает расчет с иррациональным значением  $\omega = 1 + \pi/20$  (рис. 4).

Исследована зависимость количественных характеристик малых колебаний (амплитуда, дисперсия отклонения от точки равновесия, средняя энергия) от параметров плоской волны и характера колебаний (регулярный или стохастический) на основе вычисленного показателя Ляпунова для скорости экспоненциального разбегания первоначально близких фазовых траекторий. При малых длинах волн имеется большая область стохастического движения вблизи точки равновесия.

Автор благодарит Австралийский исследовательский совет (ARC) и Российский фонд фундаментальных исследований (проект N 02-02-16439) за финансовую поддерж-

ку работы, а также С. В. Владимирова за стимулирующие обсуждения на начальном этапе работы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] З а с л а в с к и й Г. М., С а г д е е в Р. З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса, М., Наука, 1988.
- [2] Л и х т е ц б е р г А., Л и б е р м а н М. Регулярная и стохастическая динамика. М., Мир, 1984.
- [3] М а й о р о в С. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 1, 33 (1999).
- [4] V l a d i m i r o v S. V., M a i o r o v S. A., Y u M. Y., and S t e n f l o L. Phys. Rev., E, **63**, 067401 (2001).
- [5] V l a d i m i r o v S. V. and M a i o r o v S. A. 30th EPS Conf. on contr. Fusion and plasma physics. St. Petersburg, 7-11 July, **27A**, 2.2 (2003).
- [6] М а й о р о в С. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11, 3 (2002).

Институт общей физики  
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 10 декабря 2003 г.