Краткие сообщения по физике № 4 1977

УСЛОВИЕ СВОБОДНЫХ ФЕРМИОНОВ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ВЕРШИН

С. Е. Конштейн

УДК 539.2I

В работе доказано, что невозможно получить с помощью декорирования решетку, удовлетворяющую условию свободных фермионов, если исходная решетка этому условию не удовлетворяет. Приведен регулярный метод представления статсуммы замкнутых путей на решетке в виде интеграла по антикоммутирующим переменным.

I. Введение. Хорошо известно, что большую часть немногочисленных точно решаемых задач о нахождении статсуммы путей на решетках составляют задачи о путях на решетках, удовлетворяющих условию свободных фермионов /I/. Еще одним классом точно решаемых задач являются задачи, решетки которых можно с помощью декорирования свести к решеткам, удовлетворяющим условию свободных фермионов (УСФ). Оба эти класса задач можно решать с помощью пфаффианов, или, что эквивалентно, с помощью гауссовых интегралов по антикоммутирующим переменным. УСФ, первоначально сформулированное для квадратных решеток, связывается с гауссовостью соответствующего интеграла по антикоммутирующим переменным.

Ниже доказано, что после декорирования решетки, не удовлетворяющей УСФ, получается решетка, также не удовлетворяющая УСФ. Для доказательства рассмотрена операция, обратная декорированию - объединение части решетки в обобщенную вершину, и доказано, что если исходная решетка удовлетворяла УСФ, то и преобразованная решетка также будет ему удовлетворять.

2. Статистическая сумма путей на решетке. Пусть R - плоский граф с прямолинейными ребрами. Будем буквами $x, y, \dots$ обозначать вершины этого графа, через $r(x,y)$ - ребро, соединяющее вершины x и y; через $v(x)$ будем обозначать множество всех ребер, исходящих из вершины x. Будем называть $v(x)$ вертексом x. Всякое подмножество ребер из $v(x)$, в том числе и пустое, будем называть

элементом пути. Для каждого элемента пути $e(x)$ считается заданным вес $\omega(e(x))$. Далее всюду будем предполагать, что вес элементов пути с нечетным числом ребер равен нулю.

Статистической суммой путей на графе R называется величина

$$Z = \sum_{\gamma \in \Gamma} \omega(\gamma), \tag{I}$$

где Γ - множество путей на R, $\omega(\gamma) = \prod\limits_{x} \omega(v(x) \cap \gamma)$.

Все приведенные определения годятся и для неплоских графов.

<u>Утверждение I.</u> Для любого графа $\tilde{R}$ существует плоский граф R с такой же статсуммой путей и содержащий все элементы пути графа $\tilde{R}$ с их весами.

<u>Доказательство</u>. Поместим граф $\tilde{R}$ на плоскость так, чтобы в каждой точке пересечения ребер пересекалось ровно 2 ребра. Граф R получается из графа $\tilde{R}$ после добавления новых вершин в точках пересечения ребер и приписывания следующих весов новым элементам пути:

$$\omega(+) = \omega(-\!\!\bullet\!\!-) = \omega(\,\vert\!\!\bullet\,) = \omega(\cdot) = 1. \tag{2а}$$

$$\omega(\urcorner) = \omega(\llcorner) = \omega(\ulcorner) = \omega(\lrcorner) = 0. \tag{2б}$$

Очевидно, что статсумма путей на графе R равна статсумме путей на графе $\tilde{R}$. Действительно, всякому пути $\tilde{\gamma}$ на $\tilde{R}$ соответствует тот же самый путь γ на R, причем в силу (2а) $\omega(\tilde{\gamma}) = \omega(\gamma)$, а вес тех путей на R, которым нет соответствия на $\tilde{R}$, в силу (2б) равен 0.

3. <u>Обобщенные вершины</u>. Введем преобразование графа, обратное декорированию (упрощение), следующим образом. Разобьем множество вершин графа на непересекающиеся связные подмножества M_1, M_2,... Чтобы избежать несущественных трудностей, будем предполагать, что после удаления из графа R подмножества вершин M_i вместе с ребрами, исходящими из них, граф останется связным для любого i. Обобщенными вершинами называются эти подмножества M_i.

Обобщенным вертексом назовем множество ребер, исходящих из обобщенной вершины.

$$v(M) = \bigcup_{x \in M,\, y \notin M} r(x,y).$$

Аналогично определяется обобщенный элемент пути.

Рассмотрим некоторую обобщенную вершину M. Для каждого элемента пути $e(M)$ определим множество путей $\Gamma(e(M))$ на M, таких, что для любого пути γ из $\Gamma(e(M))$ выполняется равенство $\gamma \cap v(M) = e(M)$.

Припишем обобщенному элементу пути $e(M)$ вес

$$\omega(e(M)) = \sum_{\gamma \in \Gamma(e(M))} \prod_{x \in M} \omega(v(x) \cap \gamma). \qquad (3)$$

Очевидно, что статсумма путей на упрощенном графе равна статсумме путей на исходном графе R.

4. <u>Представление статсуммы путей на плоском графе в виде интеграла по антикоммутирующим переменным</u>. Поставим каждому ребру $r(x,y)$ графа R в соответствие две антикоммутирующие переменные $\xi_y(x)$ и $\xi_x(y)$. Упорядочим ребра $r(x,y)$ в каждом вертексе $v(x)$. Для этого выберем на плоскости какое-нибудь направление τ.

Через $\varphi(x,y)$ обозначим угол между этим направлением и ребром $r(x,y)$, ориентированным по направлению от x к y. Будем считать, что $0 \leqslant \varphi(x,y) < 2\pi$. Очевидно, что $\varphi(x,y) = [\varphi(y,x) + \pi] \times$ $\times\,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Будем говорить, что $r(x,y_1) > r(x,y_2)$, если $\varphi(x,y_1) > \varphi(x,y_2)$.

Далее поставим в соответствие каждому элементу пути $e(x) =$ $= \{r(x,y_1) < r(x,y_2) < \ldots < r(x,y_k)\}$ функцию от антикоммутирующих переменных

$$f(e(x)) = \omega(e(x))\xi_{y_1}(x)\xi_{y_2}(x)\ldots\xi_{y_k}(x), \qquad (4)$$

каждому вертексу $v(x)$ функцию

$$f(v(x)) = \sum_{e(x) \in v(x)} f(e(x)), \qquad (5)$$

и всему графу R функцию

$$F = \prod_{x} f(v(x)). \qquad (6)$$

Упорядочим теперь каждую пару вершин, соединенных ребром. Будем писать $x > y$, если $\varphi(x,y) > \varphi(y,x)$.

Теорема I

$$Z = \int F\cdot\exp\left[\sum_{x<y} \xi_x(y)\cdot\xi_y(x)\right]\prod_{x<y} d\xi_y(x)d\xi_x(y). \qquad (7)$$

Доказательство этой хорошо известной теоремы /2/ несложно, но аккуратное его проведение довольно громоздко.

5. Условие свободных фермионов. Для квадратной решетки условие свободных фермионов формулируется следующим образом /I/:

$$\omega(\urcorner)\cdot\omega(\llcorner) + \omega(\lrcorner)\cdot\omega(\ulcorner) = \omega(\updownarrow)\cdot\omega(\leftrightarrow) + \omega(+)\cdot\omega(\cdot). \qquad (8)$$

Для произвольной плоской решетки оно формулируется так.

Определение. Для вершины x плоского графа выполняется условие свободных фермионов, если имеет место равенство

$$f(v(x)) = \exp(Q), \qquad (9)$$

где Q – некоторая квадратичная функция антикоммутирующих переменных.

Теорема 2. Если для каждой вершины исходного плоского графа выполняется УСФ, то оно выполняется и для каждой обобщенной вершины упрощенного графа.

Доказательство. Рассмотрим упрощение графа R с обобщенными вершинами $M_1, M_2, \ldots$ Проинтегрируем подынтегральное выражение в (7) по переменным, соответствующим ребрам, соединяющим вершины, принадлежащие одной обобщенной вершине.

$$\int F\cdot\exp\left[\sum_{x<y} \xi_x(y)\cdot\xi_y(x)\right]\prod_i \prod_{\substack{x,y\in M_i\\ x<y}} d\xi_y(x)d\xi_x(y) =$$

$$= \tilde{F}\cdot\exp\left[\sum_{M_1,M_2}\ \sum_{x\in M_1, y\in M_2, x<y} \xi_x(y)\xi_y(x)\right].$$

Легко видеть, что $\tilde{F}$ представима в виде $\tilde{F} = \prod_M \tilde{f}(v(M))$, причем $\tilde{f}(v(M)) = \sum_{e(M)\in v(M)} \tilde{f}(e(M))$, а $\tilde{f}(e(M))$ с точностью до знака равна

$$\omega(e(M)) \prod_{x\in M, y\notin M} \xi_y(x),$$

где $\omega(e(M))$ задано (3).

Если для графа R выполнялось УСФ, то $F = \exp(Q)$, где Q – квадратичная форма, а так как интеграл от $\exp(Q)$ по части переменных имеет тот же вид, то $\mathcal{F}(v(M)) = \exp(Q')$, где Q' – квадратичная форма, и поэтому в силу (9) для упрощенного графа выполняется условие свободных фермионов.

Поступила в редакцию
I3 декабря I976 г.

Литература

1. E. H. Lieb, F. Y. Wu, Two-dimensional Ferroelectric Models, Phase Transitions and Critical Phenomena, ed. by C. Domb, v. 1, Acad. Press, N.-Y., 1972.
2. Ф. А. Березин, УМН, XXIV, 3 (I969).