Краткие сообщения по физике № 6 1977

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА С ДВУМЯ СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ТОКАМИ

В. Н. Зайкин

УДК 530.145

Найден наиболее общий конформно-инвариантный вид тождества Уорда для функции Грина с двумя сохраняющимися токами.

В настоящей работе рассматривается функция Грина

$$G_{\mu\nu}(x_1x_2|x_3x_4) = \langle 0|T\{j_\mu(x_3)j_\nu(x_4)\varphi(x_1)\varphi^+(x_2)\}|0\rangle, \quad (I)$$

где $\varphi(x)$ - заряженное скалярное поле размерности d, $j_\mu(x)$ - сохраняющийся ток. Метод рассмотрения вершины (I) и обозначения те же, что и в работе /I/.

Хорошо известно, что T-произведение токов, определенное обычным образом

$$Tj_\mu(x_3)j_\nu(x_4) = \theta(x_3^0 - x_4^0)j_\mu(x_3)j_\nu(x_4) + \theta(x_4^0 - x_3^0)j_\nu(x_4)j_\mu(x_3),$$

не является лоренц-инвариантным. Причина этого - появление в коммутаторе токов швингеровских членов. Можно, однако, определить лоренц-инвариантное T^*-произведение, если к обычному T-произведению добавить квазилокальные члены (так называемые "seagulls" /2/). Предположение Фейнмана /3/ состоит в том, что эти квазилокальные члены можно выбрать таким образом, что при выводе тождеств Уорда для вершины (I) можно не учитывать появление швингеровских членов в коммутаторе токов и наличие "seagulls". Это предположение однако не является обязательным требованием теории. В дальнейшем мы от него отказываемся.

Потребуем, чтобы одновременной коммутатор токов содержал операторные члены размерности $\geqslant 0$ и чтобы эти операторы при конформных преобразованиях преобразовывались бы стандартным образом.

Кроме того потребуем, чтобы "seagulls" восстанавливали бы не только конформную, но и лоренц-симметрию вершины $G_{\mu\nu}(x_1x_2|x_3x_4)$ и тождества Уорда для нее.

Итак, пусть тождество Уорда для вершины (I) имеет вид [ж)]:

$$\partial_\mu G_{\mu\nu}(x_1x_2|x_3x_4) = -e\left[\delta(x_1-x_3)-\delta(x_2-x_3)\right]G_\nu(x_1x_2|x_4) +$$
$$+ \langle T(S_{\nu\rho 1;\delta 1}(x_4)\varphi(x_1)\varphi^+(x_2))\rangle \partial_{\rho 1}\delta(x_{34}) +$$
$$+ \langle T(S_{\nu\rho 1\rho 2;\delta 2}(x_4)\varphi(x_1)\varphi^+(x_2))\rangle \partial_{\rho 1}\partial_{\rho 2}\delta(x_{34}) +$$
$$+ \langle T(S_{\nu\rho 1\rho 2\rho 3;\delta 3}(x_4)\varphi(x_1)\varphi^+(x_2))\rangle \partial_{\rho 1}\partial_{\rho 2}\partial_{\rho 3}\delta(x_{34}), \qquad (2)$$

где $G_\nu(x_1x_2|x_4) = \langle T(j_\nu(x_4)\varphi(x_1)\varphi^+(x_2))\rangle$ - функция Грина, вид которой хорошо известен /4/; $S_{\nu\rho 1}$, $S_{\nu\rho 1\rho 2}$, $S_{\nu\rho 1\rho 2\rho 3}$ - возможные швингеровские операторы (δ_i - размерности этих операторов). В дальнейшем требуется, чтобы функции Грина в (2) были конформно-инвариантными.

Наиболее общее выражение для функции Грина $G_{\mu\nu}(x_1x_2|x_3x_4)$, удовлетворяющее условиям конформной инвариантности и зарядовой симметрии, имеет вид:

$$G_{\mu\nu}(x_1x_2|x_3x_4) = g_{\mu\nu}(x_{34})(x_{34}^2)^{-dj}F_0(\xi,\eta)G(x_{12}) +$$
$$+\Big\{\lambda_\mu^{x3}(x_1x_4)\lambda_\nu^{x4}(x_2x_3)F_1(\xi,\eta) + \lambda_\mu^{x3}(x_2x_4)\lambda_\nu^{x4}(x_1x_3)F_1(\eta,\xi) +$$
$$+ \lambda_\mu^{x3}(x_1x_2)\lambda_\nu^{x4}(x_1x_2)(\xi\eta)^{-1/2}F_2(\xi,\eta)\Big\}(x_{34}^2)^{-(dj-2)}G(x_{12}), \qquad (3)$$

где $\xi = x_{12}^2x_{34}^2/x_{13}^2x_{24}^2$, $\eta = x_{12}^2x_{34}^2/x_{14}^2x_{23}^2$; d_j - размерность оператора $j_\mu(x)$. Кроме того $F_0(\xi,\eta) = F_0(\eta,\xi)$, $F_2(\xi,\eta) = F_2(\eta,\xi)$, а $G(x_{12})$ - функция Грина заряженного скалярного поля.

ж) В дальнейшем введено обозначение $\dfrac{\partial}{\partial x_{3\rho_1}} \equiv \partial_{\rho 1}$

Нам необходимо найти ограничения на функции $F_i(\xi,\eta)$, возникающие из требования того, чтобы дивергенция функции (3) при стремлении размерности тока $j_\mu(x)$ к нормальной $(d_j \to 3)$ была равна правой части (2). В то же время выяснится вопрос о том, все ли швингеровские операторы возможны в конформной теории и каковы размерности этих операторов. Нетрудно найти дивергенцию вершины (3) (см. формулы Приложения работы /I/):

$$\partial_\mu G_{\mu\nu}(x_1x_2|x_3x_4) = 2(d_j-3)(x_{34})_\nu x_{34}^{-2}(x_{34}^2)^{-d_j}F_0(\xi,\eta)G(x_{12}) +$$

$$+ (d_j-3)(x_{34}^2)^{-d_j}\lambda_\nu^{x_4}(x_1x_2)(x_{13}^{-2} - x_{23}^{-2})F_2(\xi,\eta)G(x_{12}) +$$

$$+ (d_j-3)(x_{34}^2)^{-(d_j-1)}\left[\lambda_\nu^{x_4}(x_2x_3)(x_{13}^{-2} - x_{34}^{-2})F_1(\xi,\eta) +\right.$$

$$\left. + \lambda_\nu^{x_4}(x_1x_3)(x_{23}^{-2} - x_{34}^{-2})F_1(\eta,\xi)\right] G(x_{12}) \qquad (4)$$

плюс члены, дающие дифференциальные уравнения первого порядка для $F_i(\xi,\eta)$ и обращающиеся в нуль при $d_j = 3$.

Для того чтобы получить соответствие между правой частью тождества Уорда (2) и пределом выражения (4), необходимо сделать ряд предположений о поведении функций $F_i(\xi,\eta)$ при $x_3 \to x_1$, $x_3 \to x_2$, $x_3 \to x_4$.

Прежде всего заметим, что достаточно считать, что при $x_3 \to x_1$, $x_3 \to x_2$ функции $F_0(\xi,\eta)$ и $F_1(\xi,\eta)$ не имеют особенностей типа $(x_{13}^2)^{-\alpha}$ или $(x_{23}^2)^{-\beta}$, где α,β – целые положительные числа большие или равные двум. Кроме того, пусть $F_2(\xi,\eta) \to (\xi,\eta)^{d_j/2}\bar{F}_2(\xi,\eta)$ и $\bar{F}_2(\xi,\eta)$ не имеет особенностей указанного типа при $x_3 \to x_1$, $x_3 \to x_2$. Такое поведение функций $F_i(\xi,\eta)$ обеспечит появление слагаемого $- e\left[\delta(x_1-x_3) - \delta(x_2-x_3)\right] \times$ $\times\, G_\nu(x_1,x_2|x_4)$ в пределе $d_j = 3$.

Предположим еще, что функции $F_i(\xi,\eta)$ могут быть разложены в ряд Тейлора по степеням (x_3-x_4) при $x_3 \to x_4$. Это разложение для функции $F_i(\xi,\eta)$ может быть записано в виде:

$$F_i(\xi,\eta) = Q_0^{(i)} + (x_{34})_{\rho 1} Q_1^{(i)} \lambda_{\rho 1}^{x4}(x_1 x_2) + (1/2!)(x_{34})_{\rho 1}(x_{34})_{\rho 2} \times$$
$$\times \Big\{ Q_2^{(i)} \lambda_{\rho 1}^{x4}(x_1x_2)\lambda_{\rho 2}^{x4}(x_1x_2) - Q_1^{(i)}((x_{14})^{-2} g_{\rho 1\rho 2}(x_{14}) -$$
$$- (x_{24})^{-2} g_{\rho 1 \rho 2}(x_{24}))\Big\} + (1/3!)(x_{34})_{\rho 1}(x_{34})_{\rho 2}(x_{34})_{\rho 3} \times$$
$$\times \Big\{ Q_3^{(i)} \lambda_{\rho 1}^{x4}(x_1x_2)\lambda_{\rho 2}^{x4}(x_1x_2)\lambda_{\rho 3}^{x4}(x_1x_2) - (Q_2^{(i)} + 2Q_1^{(i)}) \times$$
$$\times \sum_P (x_{14})^{-2} g_{\rho 1 \rho 2}(x_{14}) \lambda_{\rho 3}^{x4}(x_1x_2) + (Q_2^{(i)} - 2Q_1^{(i)}) \times$$
$$\times \sum_P (x_{24})^{-2} g_{\rho 1 \rho 2}(x_{24}) \lambda_{\rho 3}^{x4}(x_1x_2) + 2Q_1^{(i)}(x_{12}^2 / x_{14}^2 x_{24}^2) \times$$
$$\times \sum_P \delta_{\rho 1 \rho 2}(x_{12})_{\rho 3}(x_{12})^{-2}\Big\} + \dots \tag{5}$$

где $\sum_P$ означает суммирование по всем перестановкам индексов $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$.

В формуле (4) введены обозначения

$$Q_0^{(i)} = F_i(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\eta=0},$$

$$Q_1^{(i)} = 2\xi \frac{\partial F_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\eta=0},$$

$$Q_2^{(i)} = -4\xi\eta \frac{\partial^2 F_i(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}\Big|_{\xi=\eta=0},$$

$$Q_3^{(i)} = 4\left[\xi^3 \frac{\partial^3 F_i(\xi,\eta)}{\partial \xi^3} - \eta^3 \frac{\partial^3 F_i(\xi,\eta)}{\partial \eta^3} - 6\xi \frac{\partial F_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right]\Big|_{\xi=\eta=0}.$$

Кроме того, условие существования такого разложения (конечность частных производных $F_i(\xi,\eta)$ по x_3 при $x_3 = x_4$) накладывает ограничения на функции $F_i(\xi,\eta)$ при $x_4 = x_3$:

$$\left[\xi \frac{\partial F_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right]\Big|_{\xi=\eta=0} = 0; \tag{6a}$$

$$\left[\xi \frac{\partial F_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 F_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \eta\xi \frac{\partial^2 F_1(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta}\right]\Bigg|_{\xi=\eta=0} = 0; \qquad (6b)$$

$$\left[\eta \frac{\partial F_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial^2 F_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \xi\eta \frac{\partial^2 F_1(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta}\right]\Bigg|_{\xi=\eta=0} = 0; \qquad (6c)$$

$$\left[2\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^3 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + \xi^2\eta \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta}\right] F_1(\xi,\eta)\Bigg|_{\xi=\eta=0} = 0; \qquad (6d)$$

$$\left[2\eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta^3 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + \xi\eta^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2}\right] F_1(\xi,\eta)\Bigg|_{\xi=\eta=0} = 0; \qquad (6e)$$

$$\left[2\xi\eta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \xi^2\eta \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \xi\eta^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2}\right] F_1(\xi,\eta)\Bigg|_{\xi=\eta=0} = 0. \qquad (6f)$$

Если учесть свойства симметрии функций $F_0(\xi,\eta)$ и $F_2(\xi,\eta)$, то получим:

$$Q_1^{(1,2)} = 0; \quad Q_3^{(1,2)} = 0. \qquad (7)$$

Кроме того, производные функций $F_1(\xi,\eta)$ и $F_1(\eta,\xi)$ в точке $\xi = \eta = 0$ связаны следующим образом:

$$\xi \frac{\partial F_1(\eta,\xi)}{\partial \xi}\Bigg|_{\xi=\eta=0} = -\xi \frac{\partial F_1(\xi,\eta)}{\partial \xi}\Bigg|_{\xi=\eta=0};$$

$$\xi\eta \frac{\partial^2 F_1(\eta,\xi)}{\partial \xi \partial \eta}\Bigg|_{\xi=\eta=0} = \xi\eta \frac{\partial^2 F_1(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta}\Bigg|_{\xi=\eta=0}; \qquad (8)$$

$$\xi^3 \frac{\partial^3 F_1(\eta,\xi)}{\partial \xi^3}\Bigg|_{\xi=\eta=0} = \eta^3 \frac{\partial^3 F_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^3}\Bigg|_{\xi=\eta=0}.$$

Подставив теперь разложения для функций $F_1(\xi,\eta)$ в (4), можно перейти к пределу $d_j = 3$. Требование конформной инвариантности предельного выражения приводит дополнительно к ряду ограничений на функции $F_1(\xi,\eta)$:

$$Q_0^{(1)} = F_1(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\eta=0} = 0,$$
$$Q_0^{(2)} = F_2(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\eta=0} = 0; \tag{9a}$$

$$Q_2^{(0)} + Q_2^{(1)} = -4\xi\eta \frac{\partial^2(F_0+F_1)}{\partial\xi\partial\eta}\Big|_{\xi=\eta=0} = 0,$$
$$2\xi\frac{\partial F_1(\xi,\eta)}{\partial\xi} - \xi\eta\frac{\partial^2(F_0+F_2)}{\partial\xi\partial\eta}\Big|_{\xi=\eta=0} = 0. \tag{9b}$$

Окончательно, с учетом всех ограничений получим:

$$\partial_\mu G_{\mu\nu}(x_1x_2|x_3x_4\Big|_{dj=3} = -e\left[\delta(x_1-x_3) - \delta(x_2-x_3)\right]G_\nu(x_1x_2|x_4) -$$
$$-\pi^2\Big\{(1/4)\left[\lambda_\nu^{x_4}(x_1x_2)\lambda_\rho^{x_4}(x_1x_2) - (1/4)\delta_{\nu\rho}(x_{12}^2/x_{14}^2x_{24}^2)\right]\times$$
$$\times(Q_0^{(1)} + (1/6)Q_2^{(1)}) + (1/16)\delta_{\nu\rho}(x_{12}^2/x_{14}^2x_{24}^2)(Q_1^{(1)} + (1/2)Q_2^{(1)}\Big\}\times$$
$$\times G(x_{12})\partial_\rho\delta(x_{34}) - (\pi^2/48)Q_0^{(0)}G(x_{12})\partial_\nu\Box\delta(x_{34}). \tag{10}$$

Полученное выражение может быть приведено к виду, совпадающему с правой частью тождества Уорда (2). Из сравнения (2) и (10) замечаем, что поля $S_{\nu\rho_1\rho_2}$ не должны появляться в тождестве Уорда; кроме того поле $S_{\nu\rho_1}$ представляет собой сумму двух полей – скалярного и тензорного: $S_{\nu\rho} = \delta_{\nu\rho}B + T_{\nu\rho}$, причем оба эти поля имеют размерность 2. Поле $S_{\nu\rho_1\rho_2\rho_3}$ оказывается с-числом (размерность $\delta_3 = 0$) и представляется в виде

$$S_{\nu\rho_1\rho_2\rho_3} = -(\pi^2/16)Q_0^{(0)}(\delta_{\nu\rho_1}\delta_{\rho_2\rho_3} + \delta_{\nu\rho_2}\delta_{\rho_1\rho_3} + \delta_{\nu\rho_3}\delta_{\rho_1\rho_2}).$$

Поступила в редакцию
20 января 1977 г.

Литература

1. В. Н. Зайкин, Препринт ФИАН № 153, Москва, 1976 г.
2. R. Jackiw, D. J. Gross, in Lectures on current algebra and its applications, Princeton, 1972, p. 97.
3. M. A. B. Bég, Phys. Rev. Lett., 17, 333 (1966).
4. В. Н. Зайкин, М. Я. Пальчик, Е. С. Фрадкин, Труды международного семинара в Сухуми, 1975 г. (в печати).