

УДК 533.9

## ДЕБАЕВСКИЙ АТОМ В ПЛАЗМЕ

С. И. Яковленко

*На основе уравнения Пуассона–Больцмана рассмотрены свойства дебаевского атома, т.е. заряженной пылинки, окруженной облаком электронов и ионов, распределенных по Больцману. Получены зависимости потенциала и напряженности электрического поля от расстояния до центра сферической пылинки при радиусе пылинки, много меньшем дебаевского радиуса. Аналитические выражения согласуются с численными расчетами. Вычислены зависимости радиуса дебаевского атома (определяемого как расстояние, на котором напряженность поля обращается в нуль) от заряда пылинки и других параметров плазмы.*

Дебаевским атомом в работе [1] названа пылинка, окруженная облаком зарядов, распределенных по Больцману. Это понятие введено в связи с анализом экспериментов по изучению термоэмиссионной пылевой плазмы [2].

В работах [3, 1] на основе уравнения Пуассона–Больцмана рассмотрено распределение потенциала, напряженности поля и плотности электронов вокруг положительно заряженной пылинки для случая, когда положительные заряды полностью сосредоточены на пылинках. Однако интерес представляет и ситуация, когда дебаевский атом находится в плазме, образованной за счет ионизации газа, в котором находятся пылинки. Примером может служить как пылевая плазма в электрическом разряде, так и ядерно возбуждаемая пылевая плазма [4, 5]. Плоская задача, допускающая точное решение, рассмотрена в работах [6 – 8]. Здесь эти результаты используются при сравнении с численными расчетами для сферически симметричного случая в пределе большого радиуса пылинки.

Рассмотрение дебаевского атома в плазме представляет интерес еще и в связи с тем, что его характеристики используются при решении задачи о взаимодействии дебаевских атомов, т.е. при рассмотрении дебаевской молекулы [9].

*Уравнение Пуассона–Больцмана.* Для нахождения распределения по пространству потенциала  $\phi$ , напряженности электрического поля  $(-\nabla\phi)$  и плотности заряда  $\rho = e(N_i - N_e)$  следует решить уравнение Пуассона  $\nabla(-\nabla\phi) = 4\pi\rho$ . В уравнении Пуассона–Больцмана плотности ионов  $N_i$  и электронов  $N_e$  определяются распределением Больцмана  $N_i = N_{i0} \exp(-e\phi/T)$ ,  $N_e = N_{e0} \exp(e\phi/T)$ , где  $N_{i0}$ ,  $N_{e0}$  – плотности ионов и электронов при потенциале, равном нулю;  $T$  – температура электронов и ионов. Соответственно, уравнение Пуассона–Больцмана имеет вид:

$$\Delta\phi = 4\pi e(N_{e0} \exp(e\phi/T) - N_{i0} \exp(-e\phi/T)). \quad (1)$$

Далее длина измеряется в единицах дебаевского радиуса  $r_D = (T/4\pi e^2 N_{e0})^{1/2}$ , соответствующего плотности электронов в тех точках, где потенциал равен нулю, и используются безразмерные величины:

$$\varphi = \phi e/T; \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi \cdot er_D/T; \quad n_e = r_D^3 N_e = n_D \cdot \exp(\varphi), \quad (2)$$

где  $n_D = r_D^3 N_{e0} = (T/4\pi e^2 N_{e0}^{1/3})^{3/2}$  – величина порядка числа частиц в дебаевской сфере.

Например, в условиях экспериментов [2]  $N_{e0} = 2.5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T = 0.146 \text{ эВ} = 1700 \text{ К}$ , средний радиус пылинок  $r_p = 0.4 \text{ мкм}$ , заряд пылинок  $Z_p e = 500 e$ . При этом для характерных величин имеем:  $r_D = 0.002 \text{ см}$ ,  $T/e = 0.146 \text{ В}$ ,  $T/er_D = 80 \text{ В/см}$ ; напряженность поля на поверхности частицы  $Z_p e/r_0^2 = 4.5 \cdot 10^4 \text{ В/см}$  ( $E_0 = E(r_0) = 550$ );  $r_0 = r_p/r_D = 0.02$  – безразмерный радиус пылинки.

Для безразмерных величин (2) уравнение Пуассона–Больцмана (1) сводится к следующему уравнению для безразмерного потенциала  $\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \exp(\varphi) - \delta \cdot \exp(-\varphi). \quad (3)$$

Здесь  $\nabla\mathbf{E} = -(\exp(\varphi) - \delta \cdot \exp(-\varphi))$ ;  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ;  $\delta = N_{i0}/N_{e0}$  – параметр, характеризующий ионизацию газа, окружающего пылинки. В силу квазинейтральности системы пылинок и окружающей их плазмы  $0 \leq \delta < 1$ . Здесь для конкретности предполагается, что пылинка заряжена положительно, а в плазме преобладает заряд электронов. В случае, когда пылинка заряжена отрицательно и в плазме преобладает заряд ионов, имеем  $0 \leq \delta = N_{e0}/N_{i0} < 1$ .

В одномерном (т.е. плоском, цилиндрически симметричном или сферически симметричном) случае уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{1}{r^k} \frac{d}{dr} \left( r^k \frac{d\varphi}{dr} \right) = \exp(\varphi) - \delta \cdot \exp(-\varphi), \quad E = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (4)$$

Здесь  $k = 0, 1, 2$  соответственно для плоского, цилиндрически симметричного и сферически симметричного случаев; в зависимости от геометрии  $r = 0$  соответствует началу плоского слоя, центру цилиндра или центру сферы. Уравнение (4) допускает решение в квадратурах лишь в плоском случае  $k = 0$  [6 – 8]. Ниже рассматривается сферически симметричный случай  $k = 2$ .

*Граничные условия.* В реальной физической задаче обычно задан заряд пылинок  $Z_p e$  и их радиус  $r_p = r_0 \cdot r_D$  (о формировании заряда пылинки см. [10]). Следовательно, одним из граничных условий является условие на напряженность поля на поверхности пылинок, т.е. при  $r = r_0$ :

$$-(d\varphi/dr)|_{r=r_0} = E_0. \quad (5)$$

При этом заряд частицы определяется выражением:

$$Z_p = \frac{-r_p^2}{e} \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=r_0}, \quad z_0 = r_0^2 E_0. \quad (6)$$

Здесь  $z_0$  – безразмерный заряд частицы, определенный с помощью величин (2). Он связан с зарядом частицы в единицах электронного заряда  $Z_p$  выражением  $Z_p = z_0 r_D T / e^2 = 4\pi n_D z_0$ . Второе граничное условие задает границу дебаевского атома  $r = a_0$ , на которой поле равно нулю

$$(d\varphi/dr)|_{r=a_0} = 0. \quad (7a)$$

Нулевое значение электрического поля на границе дебаевского атома следует из его квазинейтральности.

Задача с граничными условиями (5), (7a) является краевой. В этой работе, как и в [1], она решается пристрелкой. Выбирается нулевое значение потенциала на границе атома:

$$\varphi(r)|_{r=a_0} = 0. \quad (7b)$$

Граничное условие (7b) заменяет условие (5) и краевая задача переходит в задачу Коши, которая решается интегрированием от  $r = a_0$  до  $r = r_0$ . Требуемое значение

заряда частицы  $z_0$  или напряженности поля на ее поверхности  $E_0$  находится путем подбора величины  $a_0$ .

### Заряженная частица в облаке зарядов одного знака ( $\delta = 0$ )

*Приближенные решения.* Сферически симметричному случаю при  $\delta = 0$  соответствует уравнение Пуассона–Больцмана в виде:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \exp(\varphi). \quad (8)$$

Оно дополняется граничными условиями (7). В ряде случаев величина  $a_0$  выбирается равной половине среднего расстояния между пылинками  $a_0 = a_p \approx (N_p^{-1/3}/2r_D)$  [3], где  $N_p$  – плотность пылинок. Уравнение (8) соответствует, например, термоэмиссионной плазме [2] или такой ионизации газа, когда заряд одного из знаков полностью сосредоточился на пылинках (см., например, [5]).

Далее мы основное внимание уделим рассмотрению ситуации, когда радиус частицы много меньше дебаевского радиуса:  $r_0 \ll 1$ . Кроме того, нас будет интересовать случай большой напряженности поля на поверхности частицы  $E_0 \gg 1$ . Это позволяет построить приближенное решение уравнения (8).

Выражение для потенциала вдали от поверхности частицы или при небольшом заряде частицы можно получить, положив  $\exp(\varphi) = 1$  в уравнении (8) [3]. В этом случае имеем:

$$z(r) = (a_0^3/3) \cdot [1 - (r/a_0)^3], \quad E(r) = z(r)/r^2, \quad \varphi(r) = (a_0^2/3) \cdot [a_0/r - 3/2 + (r/2a_0)^2]. \quad (9)$$

Здесь  $z(r)$  – суммарный заряд (частицы и окружающего ее облака зарядов), находящийся внутри сферы радиуса  $r \leq a_0$ .

Вблизи поверхности частицы используем решения для плоской геометрии [7]:

$$\varphi(x) = 2 \ln[2E_0/(xE_0 + 2)], \quad E(x) = 2E_0/(xE_0 + 2). \quad (10)$$

При большом заряде частицы  $z_0 \gg a_0^3/3$  и, соответственно, напряженности поля  $E_0 \gg a_0^3/(3r_0^2)$ , на близком расстоянии от поверхности частицы  $(r - r_0) \sim 1/E_0$  справедливо приближение (10). При больших расстояниях  $(r - r_0) \gg 1/E_0$  справедливо приближение (9).

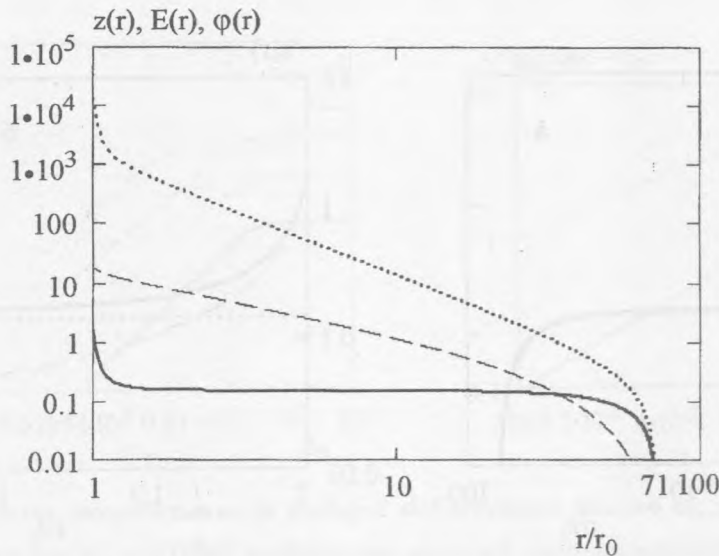


Рис. 1. Зависимость заряда  $z(r)$  (сплошная кривая), напряженности поля  $E(r)$  (пунктирная кривая) и потенциала  $\varphi(r)$  (штриховая кривая) от расстояния до центра частицы, измеренного в единицах  $r_0 = 0.0106$ . Радиус дебаевского атома  $a_0 = N_p^{-1/3}/2r_D = 0.754$  ( $a_0/r_0 = 71$ ) выбран для условий экспериментов [2] ( $T = 1700$  K,  $N_p = 5 \cdot 10^7$  см<sup>-3</sup>,  $N_{e0} = 2.5 \times 10^{10}$  см<sup>-3</sup>),  $\delta = 0$ .

*Результаты расчетов.* Пример численного расчета для больших значений  $z_0$  и  $E_0$  приведен на рис. 1. Видно, что приближенные выражения (9), (10) действительно совпадают с результатами численных расчетов в соответствующих областях изменения  $r$  (рис. 2).

При заданном значении  $r_0$  величина  $a_0$  не может быть сколь угодно большой. Каким бы большим ни было значение  $E_0$  (соответственно  $z_0$ ), зависимости  $z(r)$ ,  $E(r)$ ,  $\varphi(r)$  на расстоянии  $(r - r_0) \sim 1/E_0$  от поверхности частицы испытывают резкое падение, и при больших значениях  $r$  описываются выражениями (9). Иначе говоря, величина  $a_0$  ограничена некоторым предельным значением  $a_{0max} \equiv a_0(E_0 \rightarrow \infty)$  (рис. 3).

Была проведена серия расчетов с целью определения зависимости величины  $a_{0max}$  от  $r_0$ . Расчеты показывают (рис. 4), что при  $r_0 \ll 1$  толщина зарядового слоя  $a_{0max} - r_0$  линейно зависит от  $r_0$ . При  $r_0 \gg 1$  толщина зарядового слоя выходит на постоянное значение  $(a_{0max} - r_0) = \pi/2^{1/2} = 2.221$ , вытекающее из рассмотрения плоской задачи [1, 7].

*Предельная плотность электронов при нулевом потенциале.* Совокупность расче-

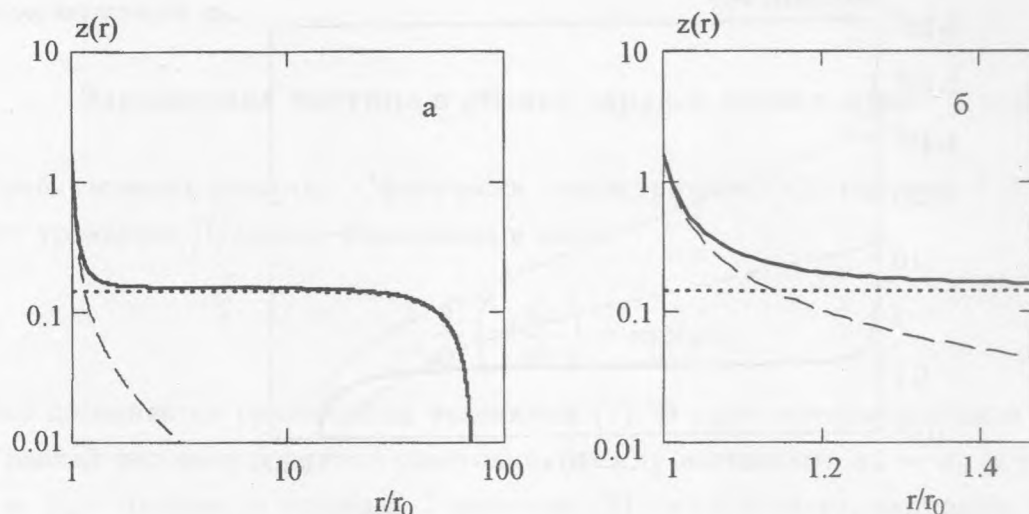


Рис. 2. Сопоставление результатов численного расчета суммарного заряда  $z(r)$  (частицы и окружающего ее облака зарядов), находящегося внутри сферы радиуса  $r$  с приближенными выражениями. Сплошные кривые – численный расчет; пунктир – расчет по формулам (9); штрихи – расчет по формулам (10): а) вся область изменения  $r$ ; б) область скачка. Параметры расчета те же, что и на рис. 1.

тов позволяет рассмотреть величину  $a_0$ , как функцию безразмерного радиуса пылинки  $r_0$  и ее безразмерного заряда  $z_0$ . Полагая  $a_0$  равным половине среднего расстояния между пылинками  $a_p \approx (N_p^{-1/3}/2r_D)$ , имеем неявную зависимость плотности электронов  $N_{e0}$  при нулевом потенциале от  $r_0$  и  $z_0$ :

$$a_0(r_0, z_0) = a_p, \quad a_0 \left( r_p \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_{e0}}{T}}, Z_p \frac{e^2}{T} \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_{e0}}{T}} \right) = \frac{1}{2N_p^{1/3}} \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_{e0}}{T}}. \quad (11)$$

Величина  $a_0$  ограничена:  $a_0(r_0, z_0 \rightarrow \infty) < \pi/2^{1/2}$  (рис. 3). Это приводит к ограничению сверху плотности электронов  $N_{e0} < N_{e0max} \equiv (\pi N_p^{2/3} T / 2e^2)$ , находящихся на среднем расстоянии между заряженными пылинками при  $Z_p \rightarrow \infty$ . С повышением заряда пылинки возрастает плотность экранирующего заряда вблизи ее поверхности, но посередине между двумя соседними пылинками плотность экранирующего заряда не растет выше  $N_{e0max}$ .

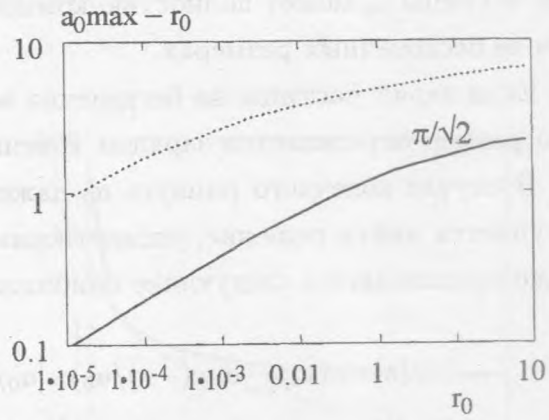
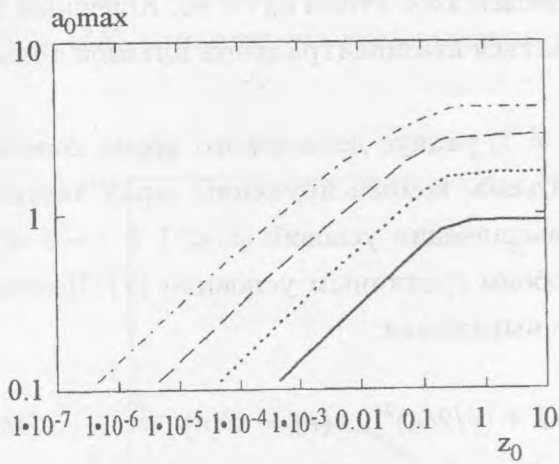


Рис. 3. Зависимость максимального радиуса дебаевского атома  $a_{0max}$  от заряда частицы. Радиус микрочастицы  $r_0 = 0.0223$  выбран для условий экспериментов [2] ( $r_p = 0.4$  мкм,  $T = 1700$  К,  $N_{e0} = 2.5 \cdot 10^{10}$  см $^{-3}$ ). Сплошная кривая -  $\delta = 0$ ; пунктир -  $\delta = 0.9$ ; штрихи -  $\delta = 0.99$ ; штрих-пунктир -  $\delta = 0.999$ .

Рис. 4. Зависимость максимальной толщины зарядового слоя  $a_{0max} - r_0$  от радиуса микро-частицы  $r_0$ . Сплошная кривая -  $\delta = 0$ , пунктир -  $\delta = 0.999$ .

### Заряженная частица в плазме ( $\delta \rightarrow 1$ )

Распределение по радиусу. Сферически симметричному случаю при  $\delta \neq 0$  соответствует уравнение Пуассона-Больцмана

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \exp(\varphi) - \delta \cdot \exp(-\varphi) \quad (12)$$

с граничными условиями (7). В этом случае величина  $a_0$  не связана со средним расстоянием между пылинками. Может рассматриваться одна изолированная пылинка в бесконечном объеме плазмы.

Если рассматривать дебаевский атом в бесконечном объеме плазмы, следует положить  $\delta = 1$ . В случае квазинейтральной системы это означает, что зарядом на пылинке можно пренебречь по сравнению с зарядом частиц плазмы. Далее мы основное внимание уделим рассмотрению малого заряда частиц  $\delta \rightarrow 1$ .

При  $\delta = 1$ ,  $\varphi \ll 1$  решение уравнения (12) имеем вид:

$$\varphi(r) = z_0 \exp(-r)/r, \quad E(r) = z_0 \exp(-r) \cdot (1 + r)/r^2. \quad (13)$$

Оно соответствует бесконечному радиусу дебаевского атома  $a_0 \rightarrow \infty$ . Конечный заряд частицы  $z_0$  может полностью компенсироваться квазинейтральной плазмой только при ее бесконечных размерах.

Если заряд частицы не бесконечно мал,  $\delta \neq 1$ , радиус дебаевского атома конечен. Его размер определяется зарядом конечного объема, компенсирующим заряд частицы  $z_0$ . В случае конечного радиуса  $a_0$  даже при выполнении условий  $\varphi \ll 1$  и  $1 - \delta \ll 1$  не удастся найти решение, удовлетворяющее обоим граничным условиям (7). Поэтому ниже предлагаются следующие приближенные выражения:

$$\varphi(r) = (z_{eff} \cdot \exp(-r)/a_0) \cdot [a_0/r - 3/2 + (r/2a_0)^2], \quad z(r) = E(r) \cdot r^2. \quad (14a)$$

$$E(r) = (z_{eff} \cdot \exp(-r)/r^2) \cdot [2a_0^3 - 2r^3 + 2a_0^3r - 3a_0^2r^2 + r^4]/(2a_0^3). \quad (14б)$$

Здесь  $z_{eff}$  – эффективный заряд, который можно рассматривать как подгоночный параметр.

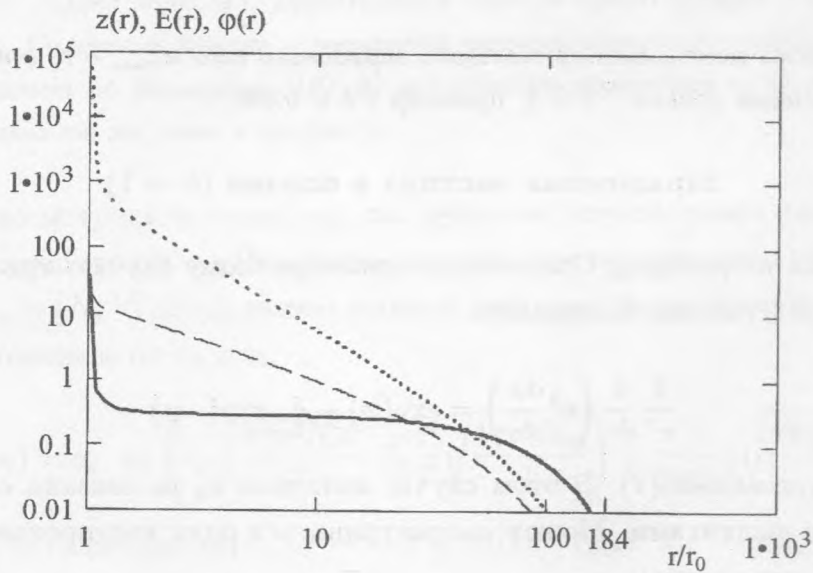


Рис. 5. Зависимость заряда  $z(r)$  (сплошная кривая), напряженности поля  $E(r)$  (пунктирная кривая) и потенциала  $\varphi(r)$  (штриховая кривая) от расстояния до центра частицы, измеренного в единицах  $r_0$ . Радиус микрочастицы  $r_0 = 0.0223$  выбран для условий экспериментов [2] ( $r_0 \cdot r_D = 0.4$  мкм,  $N_{e0} = 2.5 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup>),  $\delta = 0.999$ ,  $a_0/r_0 = 184$ .

Пример численного расчета для  $1 - \delta \ll 1$  и больших значений  $z_0$  и  $E_0$  приведен на рис. 5. Видно (рис. 6), что при малых расстояниях  $(r - r_0) \sim 1/E_0$  результаты расчета



по-прежнему хорошо описываются выражениями (10). При больших расстояниях ( $r - r_0 \gg 1/E_0$ ) справедливы приближенные выражения (14).

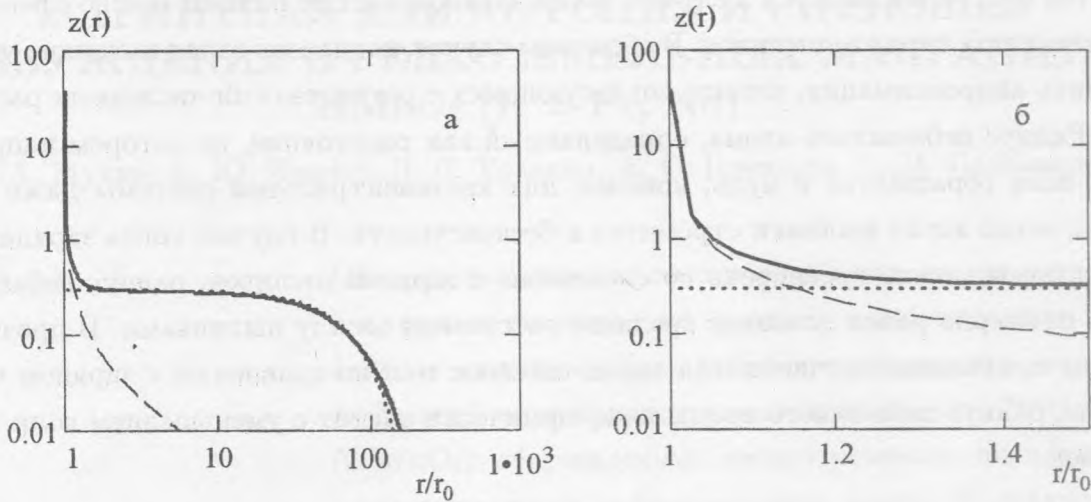


Рис. 6. Сопоставление результатов численного расчета суммарного заряда  $z(r) = E(r) \times r^2$  (частицы и окружающего ее облака зарядов), находящегося внутри сферы радиуса  $r$  с приближенными выражениями. Сплошные кривые – численный расчет; пунктир – расчет по формулам (14); штрихи – расчет по формулам (10): а) вся область изменения  $r$ ; б) область скачка. Параметры расчета те же, что и на рис. 5,  $z_{eff} = 0.29$ .

**Размеры дебаевского атома.** Для того, чтобы выявить, насколько существенно влияет величина  $\delta$  на размер дебаевского атома, была проведена серия расчетов  $a_{0max} \equiv a_0(E_0 \rightarrow \infty)$  при  $1 - \delta \ll 1$ . Расчеты показывают (рис. 3), что даже при  $1 - \delta = 10^{-3}$  величина  $a_{0max}$  не очень велика, порядка нескольких единиц. Это обусловлено слабой логарифмической зависимостью радиуса дебаевского атома от величины  $1 - \delta \ll 1$ . Эта зависимость при  $0.9 \leq \delta \leq 0.999$  приближенно описывается выражением  $a_{0max} \approx \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{1-\delta} \right) + \frac{1}{2}$ .

Зависимость максимальной толщины зарядового слоя  $a_{0max} - r_0$  от радиуса микро-частицы  $r_0$  (рис. 4) при  $\delta \neq 1$  имеет качественно такой же вид, что и для случая  $\delta = 0$ . Также как и в случае  $\delta = 0$ , при  $r_0 \gg 1$  толщина зарядового слоя выходит на постоянное значение, соответствующее рассмотрению плоской задачи при соответствующем значении  $\delta$  [8].

Подведем итоги рассмотрения свойств дебаевских атомов, т.е. пылинок, окруженных зарядовыми облаками и находящихся в плазме.

1. При радиусе пылинки, много меньшем дебаевского радиуса, удается получить аналитические выражения, описывающие распределение потенциала и напряженности поля по радиусу. Эти выражения являются приближенными решениями для различных областей изменения радиуса в случае, когда зарядом частиц плазмы можно пренебречь по сравнению с зарядом пылинок. В обратном случае, когда мал заряд пылинок, удается получить аппроксимации, хорошо согласующиеся с результатами численных расчетов.

2. Радиус дебаевского атома, определяемый как расстояние, на котором напряженность поля обращается в нуль, конечен для квазинейтральной системы даже в том случае, когда заряд пылинки стремится к бесконечности. В случае, когда зарядами частиц плазмы можно пренебречь по сравнению с зарядом пылинок, радиус дебаевского атома примерно равен половине среднего расстояния между пылинками. В противоположном предельном случае, когда заряд пылинок мал по сравнению с зарядом частиц плазмы, радиус дебаевского атома логарифмически растет с уменьшением доли заряда пылинок.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ткачев А. Н., Яковленко С. И. ЖТФ, **69**, N 1, 53 (1999).
- [2] Фортгов В. Е., Нефедов А. П., Петров О. Ф. и др. ЖЭТФ, **111**, N 2, 467 (1997).
- [3] Gibson E. G. Phys. Rev., **9**, N 12, 2389 (1966).
- [4] Фортгов В. Е., Владимиров В. И., Депутатова Л. В. и др. ДАН, **336**, N 2, 184 (1999).
- [5] Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **26**, N 23, 38 (2000).
- [6] Derjagin V. and Landau L. Acta Physicochimica URSS, **XIV**, N 6, 633 (1941).
- [7] Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **26**, N 8, 47 (2000); Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, 10 (1999).
- [8] Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **27**, N 9, 83 (2001).
- [9] Гундиенков В. А., Яковленко С. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 12, 3 (2001).
- [10] Ткачев А. Н., Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **25**, N 1, 52 (1999).